Fachbereich Mathematik
Prof. K. Große-Brauckmann
12.12.2008

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

4. Übung zu Funktionentheorie II

Aufgabe 21 – Hauptverteilungen:

a) Finde ein Beispiel einer Hauptverteilung, so dass keine konvergenzerzeugenden Summanden nötig sind (mit mehr als endlich vielen Punkten!).

b) Finde ein Beispiel einer Hauptverteilung, für das nur ein konvergenzerzeugender Summand nicht ausreicht.

Aufgabe 22 – Eindeutigkeit für Hauptverteilungen:

Ist eine Funktion, die eine Hauptverteilung löst, eindeutig bestimmt? Welcher Satz gilt?

Aufgabe 23 – Hauptverteilung auf anderen Gebieten als $\mathbb{C}$:

a) Zeige durch Abwandlung des Beweises, dass jede Hauptverteilung auf der Kreisscheibe D lösbar ist. Gib noch weitere derartige Gebiete an (obere Halbebene, Kreisring, etc.?).

b) Gib eine Funktion auf D an, die Pole erster Ordnung vom Residuum 1 in allen Punkten $1 - \frac{1}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$ hat.

Aufgabe 24 – Produktkonvergenz:

Untersuche auf absolute Konvergenz und ermittele gegebenenfalls den Wert:

$$\text{a)} \quad \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \qquad \text{b)} \quad \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \qquad \text{c)} \quad \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right)$$

Aufgabe 25 – Das bekannteste Beispiel für Partialbruchzerlegung und für das Weierstraß-Produkt:

a) Mache einen Ansatz für eine Partialbruchzerlegung von $\pi \cot \pi z$. Darin bleibt gemäß Aufgabe 22 noch eine Funktion f zu bestimmen.

b) Leite durch Differenzieren eine Identität für f' her. Zeige, dass f' periodisch ist und für $\operatorname{Im} z \to \infty$ gleichmäßig gegen 0 geht. Folgere, dass f' identisch verschwindet.

c) Zeige, dass f eine ungerade Funktion sein muss, und daher sogar f identisch verschwindet. Gewinne daraus die Partialbruchzerlegungen von $\pi \cot \pi z$

d) Gewinne einen Produktansatz für $\sin \pi z$ aus dem Weierstraßschen Satz. Bestimme die Funktion e^g durch Bildung der logarithmischen Ableitung mit Hilfe von c).

e) Setze den Wert $z = \frac{1}{2}$ in das Sinus-Produkt ein und folgere die Wallissche Darstellung von $\pi/2$.

Aufgabe 26 – Euler-Mascheroni-Konstante:

Zeige, dass die durch

$$\gamma_n := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n$$

definierte Folge streng monoton fällt und nach unten beschränkt ist.