Fachbereich Mathematik
Prof. K. Große-Brauckmann
28.11.2008

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

3. Übung zu Funktionentheorie II

Aufgabe 15 – Konforme Äquivalenz:

a) Zeige, dass die Kreisringe $A_{r,R}$ und $A_{\lambda r,\lambda R}$ für $\lambda > 0$ konform äquivalent sind. (Die Umkehrung wäre schwieriger.)

b) Zeige, dass $A_{1,\infty} = \mathbb{C} \setminus \overline{D}$ und $A_{0,\infty} = \mathbb{C}^*$ nicht konform äquivalent sind.

Aufgabe 16 – Eine Charakterisierung des konformen Typs:

Nach dem Riemannschen Abbildungssatz ist ein einfach zusammenhängendes Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ entweder konform äquivalent zur Kreisscheibe D oder zu $\mathbb{C}$. Zeige: Das Gebiet ist genau dann zu D konform äquivalent, wenn es beschränkte nicht-konstante holomorphe Funktionen besitzt.

Aufgabe 17 – $\operatorname{Aut}\hat{\mathbb{C}}$ **ist nicht kompakt:**

Betrachte $h_k \in \operatorname{Aut} D$ für $k \in \mathbb{N}$ mit

$$h_k(z) := \frac{z - \frac{1-k}{k}}{1 - \frac{1-k}{k} z}.$$

a) Bestimme den punktweisen Limes $\lim_{k\to\infty} h_k(z)$ für $z \in \overline{D}$. Schreibe $h_k(z) = \omega_a(z)$ für $a = a(k)$; wie verhält sich $a(k)$ für $k \to \infty$?

b) Das vorstehende Ergebnis sagt, dass die dreidimensionale Gruppe $\operatorname{Aut} D$ nicht kompakt ist (es gibt eine Folge, die keine in $\operatorname{Aut} D$ konvergente Teilfolge besitzt). Sind $\operatorname{Aut}\mathbb{C}$ und $\operatorname{Aut}\hat{\mathbb{C}}$ kompakt? Nenne eine kompakte Transformationsgruppe.

Aufgabe 18 – Harmonische Funktionen:

Leite aus den entsprechenden Resultaten für holomorphe Funktionen folgende Varianten für harmonische Funktionen her:

a) Jede Familie beschränkter harmonischer Funktionen auf einem Kompaktum ist normal.

b) Ein einfach zusammenhängendes Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ ist genau dann konform äquivalent zur Kreisscheibe D, wenn es beschränkte harmonische Funktionen besitzt.

Aufgabe 19 – Eine Automorphismengruppe:

Betrachte die dreidimensionale Untergruppe $\mathsf{PSL}(2,\mathbb{R})$ der Automorphismen $\mathsf{PSL}(2,\mathbb{C})$ von $\hat{\mathbb{C}}$.

a) Finde eine Teilmenge $U \subset \hat{\mathbb{C}}$, so dass $\mathsf{PSL}(2,\mathbb{R}) \subset \operatorname{Aut} U$.
Tipp: Schaue scharf hin und bestimme eine eindimensionale Menge, die invariant unter ganz $\mathsf{PSL}(2,\mathbb{R})$ bleibt. Beweise dann, dass ein von dieser Menge berandetes Gebiet U invariant unter $\mathsf{PSL}(2,\mathbb{R})$ bleibt.

b) Zeige nun $\operatorname{Aut} U = \mathsf{PSL}(2,\mathbb{R})$.

Aufgabe 20 – Dirichletsches Prinzip:

In dieser Aufgabe geht es um die von Riemann vorgeschlagene Beweisstrategie zum Beweis des Riemannschen Abbildungssatzes. Sei dazu $U \subset \mathbb{R}^n$ (speziell $U \subset \mathbb{C}$) beschränkt und offen mit glattem Rand ∂U.

a) Eine Abbildung $h \in C^\infty(U, \mathbb{R}^m)$ ist harmonisch ($\Delta h = 0$) genau dann, wenn ihre *Energie* $E(h) := \int_U |dh|^2 \, dx$ eine verschwindende erste Variation besitzt: Es gilt also

$$\frac{d}{dt} E(h + tf)\big|_{t=0} = 0 \qquad \text{für alle } f \in C_c^\infty(U, \mathbb{R}^m).$$

Tipp: Betrachte zuerst $m = 1$. Verwende den Gaußschen Divergenzsatz.

b) Untersuche nun die kritischen Punkte von Teil a) genauer und zeige, dass sie sämtlich absolute Minima sind: Eine Abbildung $h \in C^\infty(\overline{U}, \mathbb{R}^m)$ ist harmonisch genau dann, wenn sie unter allen glatten Abbildungen mit denselben Randwerten die Energie minimiert, d.h.

$$E(f) \geq E(h) \qquad \text{für alle } f \in C^\infty(\overline{U}, \mathbb{R}^m) \text{ mit } f|_{\partial U} = h|_{\partial U}.$$

Tipp: Berechne $E(f) = E\big(h + (f - h)\big)$ für $m = 1$. Warum gilt die Rechnung auch für beliebiges $m \in \mathbb{N}$?

c) Wir betrachten nun den Fall $m = 2$ und

$$E_0 := \inf\{E(f) : f \in C^\infty(U, \mathbb{C}) \text{ mit } f(\partial U) \subset \mathbb{S}^1\} \in [0, \infty).$$

Ohne dies zu bestätigen, nehmen wir $E_0 < \infty$ an. Dann gibt es eine sogenannte *Minimalfolge* $f_n \in C^\infty(U, \mathbb{R}^2)$ mit $E(f_n) \searrow E_0$. Es ist keine Beschränkung der Allgemeinheit, anzunehmen

$$f_n \in \big\{f \in C^\infty(U, \mathbb{R}^2) : E(f) \in [E_0, E_0 + 1]\big\}.$$

Weil die f_n eine beschränkte Folge von Funktionen bilden, die in der genannten abgeschlossenen Menge liegt, so konvergiert die Folge gegen $h := \lim f_n$. Nach *b*) ist h harmonisch, und wegen des Maximumprinzips gilt sogar $h \in C^\infty(U, D)$.
Wir übergehen nun den Beweis einer Reihe weiterer Tatsachen: Durch ein Variationsargument zeigt man, dass h konform ist, und die Injektivität leitet man daraus her, dass der berandende Kreis $\mathbb{S}^1$ genau einmal durchlaufen wird. Damit ist h die im Riemannschen Abbildungssatz gesuchte Funktion. Wo steckt der entscheidende Fehler?