Fachbereich Mathematik
Prof. K. Große-Brauckmann
14.11.2008

2. Übung zu Funktionentheorie II

Aufgabe 8 – Fixpunkte:

Bestimme die Fixpunkte in $\hat{\mathbb{C}}$ der folgenden Möbiustransformationen: Dilatation, Translation, gespiegelte Inversion. Wie sieht es bei der ungespiegelten Inversion $z \mapsto 1/\overline{z}$ aus?

Aufgabe 9 – Doppelverhältnis:

Beweise: Der von einem distinkten Tripel z_1, z_2, z_3 eindeutig bestimmte Kreis bzw. die dadurch bestimmte Gerade enthält genau dann einen weiteren Punkt $z \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \{z_1, z_2, z_3\}$ wenn $\mathrm{DV}(z, z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Aufgabe 10 – Stereographische Projektion:

Bestätige die folgenden Eigenschaften von

$$\mathrm{st}\colon \hat{\mathbb{C}} \to \mathbb{S}^2, \qquad \mathrm{st}(z) := \begin{cases} \frac{1}{|z|^2+1}\big(2\operatorname{Re} z, 2\operatorname{Im} z, |z|^2 - 1\big) & z \in \mathbb{C}, \\ (0,0,1) & z = \infty. \end{cases}$$

a) $\mathrm{st}(z) \in \mathbb{S}^2$
b) Für $z \in \mathbb{C}$ liegt der Punkt $\mathrm{st}(z)$ auf der Geraden in $\mathbb{R}^3$ durch $(z, 0)$ und $N = (0, 0, 1)$.
c) $\mathrm{st}^{-1}(x, y, z) = \frac{1}{1-z}(x + iy)$
d) Wie lautet die entsprechende Projektion st_a längs Geraden auf die Sphäre mit Mittelpunkt in $(0, 0, a)$ wobei $a \in \mathbb{R}$?

Aufgabe 11 – Riemannsche Zahlenkugel:

Es sei $\hat{\mathbb{C}}$ die Riemannsche Zahlenkugel. Offene Mengen von $\hat{\mathbb{C}}$ sind nach Definition Urbilder offener Mengen von $\mathbb{S}^2$ unter der stereographischen Projektion st.

a) Jede offene Umgebung von $\infty \in \hat{\mathbb{C}}$ ist von der Form $\{\infty\} \cup \mathbb{C} \setminus K$, wobei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt ist.
b) Zeige, dass $\hat{\mathbb{C}}$ kompakt ist.
c) Beschreibe den Effekt einiger Abbildungen von $\hat{\mathbb{C}}$ auf der Zahlenkugel, d.h. finde $f_S = \mathrm{st} \circ f \circ \mathrm{st}^{-1}$ für die folgenden Abbildungen $f\colon \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$: $z \mapsto e^{i\varphi} z$ wobei $\varphi \in \mathbb{R}$, $z \mapsto 1/z$, $z \mapsto z^2$ …Bestimme umgekehrt eine Möbiustransformation f, die einer $90°$-Drehung der Sphäre um die y-Achse des $\mathbb{R}^3$ entspricht.

Aufgabe 12 – Automorphismen des Einheitskreises:

a) Rechne nach: $\omega_a \in \operatorname{Aut} D$ hat auf ganz D eine nicht verschwindende Ableitung.
b) Seien zwei Punkte $p, q \in D$ gegeben. Wie lautet ein $f \in \operatorname{Aut} D$ mit $f(p) = q$? Gegeben eine "Richtung" durch p, auf welche Richtung durch q wird sie abgebildet (denken Sie zuerst an den Fall $p = q = 0$). Unter welcher Annahme ist also f wie zuvor eindeutig bestimmt?

Aufgabe 13 – Satz von Rouché:

a) Bestimme die Anzahl von Nullstellen in den angegebenen Gebieten:
   • $2z^4 - 5z + 2$ in $|z| > 1$, • $z^7 - 5z^4 + iz^2 - 2$ in $|z| < 1$.
b) Beweise den Fundamentalsatz der Algebra mit Hilfe des Satzes von Rouché.