Fachbereich Mathematik
Prof. K. Große-Brauckmann
29.10.2008

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

1. Übung zu Funktionentheorie II

Aufgabe 1 – Singularität in ∞:

a) Welche Ihnen bekannte holomorphe Funktionen auf $\mathbb{C}$ haben in ∞ eine wesentliche Singularität?

b) Stellen Sie eine Vermutung in Bezug auf periodische Funktionen auf und beweisen Sie sie.

Aufgabe 2 – Zusammenhang:

a) Das stetige Bild einer zusammenhängenden Menge ist zusammenhängend.

b) Das stetige Bild einer einfach zusammenhängenden Menge ist einfach zusammenhängend.

Aufgabe 3 – Schnittwinkel von Kurven:

Sei f holomorph mit einer k-fachen p Stelle in 0, d.h. es gilt $f(z) = p + a_k z^k + a_{k+1} z^{k+1} + \ldots$ in einer Umgebung von $z = 0$. Ferner seien γ, η Kurven durch 0 mit Winkel $\angle(\gamma'(0), \eta'(0))$. Definieren Sie auch für diesen Fall diesem Fall den Winkel der Bildkurven $f \circ \gamma$ mit $f \circ \eta$ in p und drücken Sie ihn durch $\angle(\gamma'(0), \eta'(0))$ aus.

Aufgabe 4 – Mercator-Projektion:

Die Mercator-Projektion bildet eine geeigneten offene Menge der Sphäre auf $\mathbb{R}^2$ winkeltreu ab, so dass Längengerade auf zur y-Achse parallele Geraden abgebildet werden. Zeige: Eine solche Abbildung existiert. Bleiben die Bilder von Kurven, die gegen die Pole laufen, beschränkt?

Aufgabe 5 – Anti-Holomorphie:

a) Zeige: $f(\overline{z})$ ist antiholomorph genau dann, wenn $f(z)$ holomorph ist. Folgere:
   - Polynome und Potenzreihen in $\overline{z}$ sind antiholomorph.
   - Ist f holomorph, so ist $\overline{f}$ antiholomorph.

b) Man kann jede reell differenzierbare Funktion $f \in C^1(U, \mathbb{C})$ in $f(z) = h(z) + a(z)$ zerlegen mit $h, a \in C^1(U, \mathbb{C})$ und h holomorph, a antiholomorph.

Aufgabe 6 – Beispiel einer Möbiustransformation:

Finde heraus, wohin die Möbiustransformation

$$\eta \in \operatorname{Aut} \hat{\mathbb{C}}, \qquad \eta(z) := \frac{z - i}{z + i}$$

die reelle Achse abbildet. Worauf wird die obere Halbebene H abgebildet?

Aufgabe 7 – Offene Aufgabe:

Finde heraus, welche Interpretation die Gruppe $\mathsf{PSL}(2, \mathbb{C})$ in Bezug auf den hyperbolischen Raum gestattet.