Analysis II für M, HLM, Ph

14. Übung
Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 42 Oberflächenintegral

Berechne die Oberfläche der Kugel $B_R(0) \subset \mathbb{R}^3$ mit Mittelpunkt 0 und Radius $R \in \mathbb{R}$.

Die Kugel $B_R(0) \subset \mathbb{R}^3$ mit Radius R kann über $K = [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \subset G = \mathbb{R}^2$ durch

$$\phi_R(u) = R \cdot \begin{pmatrix} \cos u_1 \cos u_2 \\ \sin u_1 \cos u_2 \\ \sin u_2 \end{pmatrix}$$

parametrisiert werden. Jetzt folgt

$$D\phi_R = R \cdot \begin{pmatrix} -\sin u_1 \cos u_2 & -\cos u_1 \sin u_2 \\ \cos u_1 \cos u_2 & -\sin u_1 \sin u_2 \\ 0 & \cos u_2 \end{pmatrix}, N_R = R^2 \begin{pmatrix} \cos u_1 \cos^2 u_2 \\ \sin u_1 \cos^2 u_2 \\ \sin u_2 \cos u_2 \end{pmatrix}.$$

Also gilt $N = R \cdot \cos u_2 \cdot \phi_R(u_1, u_2) = R^2 \cos u_2 \phi_1(u_1, u_2)$ und damit $|N| = R^2 |\cos u_2|$. Die Kugel ist bei $K = [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \subset G = \mathbb{R}^2$ durch

$$\phi_R(u) = R \cdot \begin{pmatrix} \cos u_1 \cos u_2 \\ \sin u_1 \cos u_2 \\ \sin u_2 \end{pmatrix}$$

parametrisiert werden. Jetzt folgt

$$D\phi_R = R \cdot \begin{pmatrix} -\sin u_1 \cos u_2 & -\cos u_1 \sin u_2 \\ \cos u_1 \cos u_2 & -\sin u_1 \sin u_2 \\ 0 & \cos u_2 \end{pmatrix}, N_R = R^2 \begin{pmatrix} \cos u_1 \cos^2 u_2 \\ \sin u_1 \cos^2 u_2 \\ \sin u_2 \cos u_2 \end{pmatrix}.$$

Also gilt $N = R \cdot \cos u_2 \cdot \phi_R(u_1, u_2) = R^2 \cos u_2 \phi_1(u_1, u_2)$ und damit $|N| = R^2 |\cos u_2|$. Die Kugel ist bei der hier gewählten Parametrisierung im Nord- und Südpol degeneriert, dies wird aber für die Berechnung der Oberfläche keine Bedeutung haben. Über die Definition des Oberflächenintegrals erhalten wir nun

$$|\partial B_R(0)| = \int_K R^2 \cos u_2 du = R^2 \cdot \int_0^{2\pi} du_1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos u_2 du_2 = R^2 4\pi.$$

G 43 Volumen des Körpers

1. Sei $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y, y^2 \leq x\}$ und ein Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x + y^2, x^2 - 2xy)^T$ gegeben. Berechne $\int_{\partial\Omega} f(s) dS(s)$ mit Hilfe des Gaußschen Satzes.
2. Sei ein Vektorfeld $v = (x, x + y, x + y + z)^T$ gegeben. Berechne die Zirkulation von v, d.h. das Integral $\int_\gamma v(x) \cdot \tau(x) ds(x)$, wobei $\tau(x)$ ein Tangenteneinheitsvektor an γ ist, längs der Schnittkurve γ der oberen Hemisphäre $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$ mit der (x, y)-Ebene.

   Hinweis: Nehme den Satz von Stokes zu Hilfe!

1. $f(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big)^T$.

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} f(s)dS(s) &\overset{\text{Satz}}{=} \iint\limits_{\Omega} \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{xy}\Big)dxdy \\
&= \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (2x - 2y - 2y)dy \\
&= 2\int_0^1 (xy - y^2)\,\Big|_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} dx = 2\int_0^1 (x\sqrt{x} - x - x^3 + x^4)dx \\
&= 2\Big(\frac{2}{5}x^{5/2} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5\Big)\Big|_0^1 = 2\Big(\frac{2}{5} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\Big) = -\frac{3}{10}\,.
\end{aligned}$$

2. Für die obere Hemisphäre und die (x,y)-Ebene (Normalenrichtungen „nach oben“) ergibt sich ($\partial K = \gamma$)

$$\int_\gamma v\cdot ds \overset{\text{Satz}}{=} \int_K (\operatorname{rot} v\cdot n)d\sigma = \iint\limits_K \operatorname{rot} v\cdot e_3 dxdy = \iint\limits_K \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} dxdy = \pi.$$

G 44 Satz von Gauß

Berechne den Fluss des Feldes $v = (xy^2, x^2y, y)^T$ durch die Oberfläche des Zylinderabschnitts $B = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 \le 1,\ -1 \le z \le 1\}$. Bestimme die Quellpunkte von v.

Der Fluss des Feldes $v = \begin{pmatrix}xy^2\\x^2y\\y\end{pmatrix}$ *durch die Oberfläche des Zylinderabschnitts B beträgt*

$$\iint\limits_S (v\cdot n)ds = \iiint\limits_B (\div v)dv = \iiint\limits_B (x^2+y^2)dxdydz = \pi.$$

Zylinerkoordinaten *($x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, z = z,\ dV = r\,dr\,d\varphi\,dz$). Berechnen wir jetzt das Oberflächenintegral $\iint\limits_S (v\cdot n)ds$. Die Parametrisierung von ∂B ist*

$$\begin{aligned}
F(\varphi, z) &= \begin{cases}\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ z\end{cases} : \underbrace{[0,2\pi]\times[-1,1]}_{=\mathcal{D}} \to \mathbb{R}^3 \\
n &= F_\varphi \times F_z = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)^T,
\end{aligned}$$

dann gilt

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{\partial B} v\cdot n\,d\sigma &= \iint\limits_{\mathcal{D}} (v, F_\varphi, F_z)d\varphi dz \\
&= \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} dz \begin{pmatrix}\cos\varphi\sin^2\varphi\\ \cos^2\varphi\sin\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ 0\end{pmatrix} d\varphi \\
&= 2\int_0^{2\pi} 2\cos^2\varphi\sin^2\varphi\,d\psi = \begin{bmatrix} \cos^2_\varphi = \frac{1}{2}(1+\cos^2\varphi) \\ \sin^2\varphi = \frac{1}{2}(a - \cos^2\varphi) \end{bmatrix} \\
&= \int_0^{2\pi}\Big(\frac{1}{2} + \cos 4\varphi\Big)d\varphi = \pi.
\end{aligned}$$

$\div v = x^2 + y^2 \neq 0$ für $(x, y) \neq (0, 0) \Rightarrow$ *jeder Punkt außerhalb der z-Achse ist ein Quellpunkt.*