Analysis II für M, HLM, Ph

13. Übung
Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 38 Höhenlinien

Diskutiere die Höhenlinien der Funktion

$$F\colon \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto xye^{-x-y}.$$

Diskutiere insbesondere, in welchen Gebieten in $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ sich die Gleichung $F(x,y) = c$ lokal nach x bzw. y auflösen lässt.

Zunächst müssen wir herausfinden, für welche $c \in \mathbb{R}$ es überhaupt Höhenlinien geben kann, und wo sie aus genau einem Punkt bestehen. Dazu berechnen wir den Gradienten: Es gilt für alle $(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$

$$\nabla F(x,y) = ((y - xy)e^{-x-y}, (x - xy)e^{-x-y}).$$

Damit verschwindet der Gradient nur, falls

$$(y - xy, x - xy) = 0 \iff (x,y) = (1,1).$$

Es kann also nur in $(1,1)$ ein lokales Extremum vorliegen. Weiter ist

$$\mathrm{Hess}F(x,y) = e^{-x-y} \begin{pmatrix} -2y + xy & 1 - x - y + xy \\ 1 - x - y + xy & -2x + xy \end{pmatrix}$$

und daher $\mathrm{Hess}F(1,1) = e^{-2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ eine negativ definite Matrix (Warum?). Also besitzt F in $(1,1)$ ein isoliertes lokales Maximum mit $F((1,1)) = e^{-2}$, welches sogar ein absolutes Maximum ist (warum?). Da man F stetig auf $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$ fortsetzen kann als $\tilde{F} := xye^{-x-y}$ und da dann für alle $x \in \mathbb{R}_+$ auch $\tilde{F}_1\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $\tilde{F}_1(y) = F(1,y)$ stetig ist, wird nach dem Zwischenwertsatz jeder Wert zwischen $F_1(0) = 0$ und $F_1(1) = e^{-2}$ angenommen. Also gilt

$$F((\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*) \setminus \{(1,1)\}) \subset]0, e^{-2}[.$$

Die Höhenlinie durch $(1,1)$ besteht also nur aus einem Punkt, d.h. $N_F(e^{-2}) = \{(1,1)\}$. Weiter gilt

$$N_F(c) = \emptyset \text{ falls } c > e^{-2} \text{ oder } c \leq 0.$$

Da

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 0 \iff y - xy = 0 \iff x = 1$$

und

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 0 \iff x - xy = 0 \iff y = 1$$

läßt sich über die Darstellung der Höhenlinien mittels differenzierbarer Funktionen für $c \in]0, e^{-2}[$ die folgende Aussage machen:

Wir können für $x \neq 1$ die Gleichung $F(x,y) = c$ lokal nach x auflösen, und für $y \neq 1$ können wir sie lokal nach y auflösen. Das heisst, für genügend kleine I, J gilt:

1. *Eine Menge*
$$\{(x,y) \in I \times J \mid F(x,y) = c\}$$
läst sich in der Form
$$\{(x,y) \in I \times J \mid y = \varphi(x)\}$$
mit einer differenzierbaren Funktion $\varphi\colon I \to J$ *darstellen, wenn* $1 \notin J$ *und für alle* $x \in I$ *ein* $y \in J$ *existiert mit* $F(x,y) = c$.
2. *Eine Menge*
$$\{(x,y) \in I \times J \mid F(x,y) = c\}$$
läst sich in der Form
$$\{(x,y) \in I \times J \mid x = \psi(x)\}$$
mit einer differenzierbaren Funktion $\psi\colon J \to I$ *darstellen, wenn* $1 \notin I$ *und für alle* $y \in J$ *ein* $x \in I$ *existiert mit* $F(x,y) = c$.

Aus der lokalen Auflösbakeit und der noch zu zeigenden Tatsache, daß man für $y \neq 1$ *bzw.* $x \neq 1$ *die Gleichung lokal* eindeutig *nach* y *bzw.* x *auflösen kann, ergibt sich nun daß man auch maximale Intervalle* I, J *findet (denn die oben beschriebenen Intervalle sind nicht leer und nicht einpunktig, wir können sie also zusammensetzen und die Funktionen aneinanderhängen).*

Wir zeigen nur, daß man $F(x,y) = c$ *für* $y \neq 1$ *eindeutig nach* x *auflösen kann: Seien* x *und* c *gegeben. Wir setzen* $c_x := \frac{c}{x \cdot e^{-x}}$. *Dann gilt* $F(x,y) = c \iff h(y) := ye^{-y} = c_x$. *Nun gilt* $h'(y) = (1-y)e^{-y}$. *Für* $y < 1$ *ist* h *also streng monoton steigend, und für* $y > 1$ *ist* h *streng monoton fallend. Damit ist für* $y < 1$ *und* $y > 1$ *die Gleichung jeweils eindeutig nach* y *auflösbar.*

G 39 Extremstellen unter Nebenbedingungen: Lagrangesche Multiplikatoren

Bestimme das größtmögliche Volumen eines achsenparallelen Quaders, der im Ellipsoid
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$
Platz hat.

Ein achsenparalleler Quader mit Mittelpunkt 0 *läßt sich eindeutig durch die Angabe einer Ecke* (x,y,z) *beschreiben. Offensichtlich hat ein achsenparalleler Quader mit maximalem Volumen im Ellipsoid seien Mittelpunkt in* 0 *und seine Ecken auf dem Rand des Ellipsoids, d.h. für die Ecken* (x,y,z) *gilt* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. *Wir betrachten die Ecke des Quaders mit* $x, y, z \geq 0$. *Das Volumen ist* $V(x,y,z) = 8xyz$. *Die Nebenbedingung ist* $f(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. *Nun gilt*

$$\begin{aligned} \nabla V(x,y,z) &= (8yz, 8xz, 8xy)^T \\ \nabla f(x,y,z) &= (\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2}). \end{aligned}$$

Aus der Langrange'schen Multiplikatorenregel folgt

(i) $8y_0z_0 = 2\lambda\frac{x_0}{a^2}$

(ii) $8x_0z_0 = 2\lambda\frac{y_0}{a^2}$

(iii) $8x_0y_0 = 2\lambda\frac{z_0}{a^2}$

Die drei Gleichung ergeben

$$8x_0y_0z_0 = 2\lambda\frac{x_0^2}{a^2} = 2\lambda\frac{y_0^2}{b^2} = 2\lambda\frac{z_0^2}{c^2},$$

also

$$\frac{x_0^2}{a^2} = \frac{y_0^2}{b^2} = \frac{z_0^2}{c^2}.$$

Aus $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1$ *(die NB!) folgt somit* $\frac{x_0^2}{a^2} = \frac{1}{3}$, *also ist die Lösung*

$$x_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot a, \quad y_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot b, \quad z_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot c$$

Da die Funktion $V(x,y,z)$ *stetig ist, nimmt sie auf der kompakten Menge* $A := \{(x,y,z) \mid x,y,z \geq 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ *ihr Maximum und ihr Minimum an. Ist* $x = 0, y = 0$ *oder* $z = 0$, *so ist* $V(x,y,z) = 0$. *Ist* $V(x,y,z)$ *das Maximum von* V *auf* A, *so gilt* $x,y,z > 0$. *Die Lagrangesche Multiplikatorenregel greift also und der Punkt* (x_0,y_0,z_0) *ist das Maximum.*

G 40 Satz von Fubini

Berechne mit Hilfe des Satzes von Fubini das Volumen der Einheitskugel $B_1(0) := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \|(x,y,z)\|_2 \leq 1\}$.

Hinweis: Falls nötig kann bei der Berechnung des Integrals die Formel $\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-y^2}dy = \frac{a^2}{2}\pi$ ohne Beweis verwendet werden.

Es gilt

$$B_1(0) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in D, -\sqrt{1-x^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}\},$$

wobei D *die Kreisscheibe*

$$D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$$

bezeichnet. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\mathit{Vol}(B_1(0)) &= \int_{B_1(0)} 1d(x_1,x_2,x_3) \\
&= \int_D \Big(\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} 1dz\Big)d(x,y) \\
&= 2\cdot\int_D \sqrt{1-x^2-y^2}d(x,y) \\
&= 2\cdot\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}d(x,y) \\
&= 2\cdot\int_{-1}^{1}\Big(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}dy\Big)dx \qquad (*)
\end{aligned}$$

Für jedes feste x *setzen wir nun* $a_x := \sqrt{1-x^2}$ *und erhalten wegen des Hinweises*

$$\begin{aligned}
\int_{-a_x}^{a_x} \sqrt{a_x^2-y^2}dy &= \Big[-\frac{a_x^2}{2}\arccos\frac{y}{a_x} + \frac{y}{2}\sqrt{a_x^2-y^2}\Big]_{-a_x}^{a_x} \\
&= -\frac{a_x^2}{2}(\arccos(1)-\arccos(-1)) \\
&= -\frac{a_x^2}{2}(0-\pi) \\
&= \frac{a_x^2}{2}\pi
\end{aligned}$$

Also ergibt sich

$$\begin{aligned}(*) &= \int_{-1}^{1} \pi(1-x^2)dx \\ &= \pi \cdot \int_{-1}^{1} (1-x^2)dx \\ &= \pi \cdot [x - \frac{1}{3}x^3]_{-1}^{1} \\ &= \frac{4}{3}\pi.\end{aligned}$$

Dies deckt sich mit der aus der Schule bekannten Volumenformel.

G 41 Integrierbarkeit

Gegeben seien $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$ und die Funktion $f(x,y) = \frac{x-y}{(x+y)^3}$.

1. Zeige, daß die Funktion f in $(0,0)$ nicht stetig fortsetzbar ist.
2. Zeige, daß

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\ dy \right) dx = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\ dx \right) dy = -\frac{1}{2}$$

gilt.
Erläuter, warum das Gebietsintegral

$$\iint_G f(x,y)\ dG$$

nicht existiert.

1. *Wähle die Folge*

$$(x_n, y_n) = \left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n} \right) \quad \textit{für} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Es gilt:

$$f(x_n, y_n) = \frac{\frac{1}{n}}{\left(\frac{3}{n}\right)^3} = \frac{n^2}{27},$$

und somit $\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \infty$. *Also ist* f *in* $(0,0)$ *nicht stetig fortsetzbar.*

2. *Wir berechnen das erste Integral.*
Substituiere

$$u = x + y \quad \textit{mit} \quad du = dy \quad \textit{und} \quad x - y = 2x - u.$$

Dann ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\ dy \right) dx &= \int_0^1 \left(\int_x^{x+1} \frac{2x-u}{u^3}\ du \right) dx = \int_0^1 \left(\int_x^{x+1} \left(\frac{2x}{u^3} - \frac{1}{u^2} \right)\ du \right) dx \\ &= \int_0^1 \left[-\frac{x}{u^2} + \frac{1}{u} \right]_{u=x}^{u=x+1} dx \\ &= \int_0^1 \left(-\frac{x}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1} + \frac{x}{x^2} - \frac{1}{x} \right) dx = \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2}\ dx \\ &= -\frac{1}{x+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Mittels derselben Substitution berechnen wir das zweite Integral, wobei hier $x - y = u - 2y$.
Dann ergibt sich

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\, dx \right) dy = \int_0^1 \left(\int_y^{y+1} \frac{u-2y}{u^3}\, du \right) dy = \int_0^1 \left(\int_y^{y+1} \left(\frac{1}{u^2} - \frac{2y}{u^3} \right) du \right) dy$$
$$= \int_0^1 \left[-\frac{1}{u} + \frac{y}{u^2} \right]_{u=y}^{u=y+1} dy$$
$$= \int_0^1 \left(-\frac{1}{y+1} + \frac{y}{(y+1)^2} + \frac{1}{y} - \frac{y}{y^2} \right) dx = -\int_0^1 \frac{1}{(y+1)^2}\, dx$$
$$= -\frac{1}{2}.$$

Da sich für diese beiden Integrale verschiedene Werte ergeben, kann das Gebietsintegral nicht existieren.