Analysis II für M, HLM, Ph

12. Übung
Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 35 Fixpunktsatz

Seien (X, d) und (Y, D) metrische Räume und $A \subseteq X$ und $B \subseteq Y$ Teilmengen.
Eine Funktion $f : A \to B$ erfüllt in einer Menge $M \subseteq A$ die Lipschitz-Bedingung, wenn es eine (nichtnegative) reelle Zahl L gibt, mit der die Bedingung

$$\forall x_1, x_2 \in M : D(f(x_1), f(x_2)) \leq L \cdot d(x_1, x_2)$$

erfüllt ist.

1. Ist die Exponentialfunktion $x \mapsto \exp(-x)$ auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ Lipschitz-stetig?
2. Beweisen sie, daß die Gleichung $x = \exp(-x)$ genau eine Lösung in $\mathbb{R}$ hat.

1. *Die Funktion $f : x \mapsto \exp(-x)$ ist auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ Lipschitz-stetig. Da der Betrag der Ableitung $f'(x) = -\exp(-x)$ eine monoton fallende Funktion ist, ist die Lipschitz-Konstante L durchdurch $L = |f'(a)| = \exp(-a)$ gegeben.*
2. *Da die Funktion $f : x \mapsto \exp(-x)$ streng monoton fällt, gilt $\exp(-x) > \exp(-\frac{1}{e}) > \exp(-1) > \frac{1}{e}) > x$ für $x < \frac{1}{e})$ und $\exp(-x) < \exp(-1) < 1 < x$ für $x > 1$. Falls die Funktion f einen Fixpunkt hat, so muß dieser im Intervall $[\frac{1}{e}), 1]$ liegen. Die Lipschitz-Konstante L auf diesem Intervall ist nach (a) durch $L = \exp(-\frac{1}{e}) < 1$ gegeben. Nach dem Banachschen Fixpunktsatz hat f daher einen Fixpunkt im Intervall $[\frac{1}{e}), 1]$.*

G 36 Lokale Umkehrbarkeit

Zeige, daß die Abbildung $F \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$$

für jedes $(x, y) \neq (0, 0)$ lokal umkehrbar ist. Ist F auch global umkehrbar? Bestimme das Urbild $F^{-1}(\{(a, b)\})$ eines beliebigen Punktes $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Offensichtlich ist F stetig differenzierbar. Für die lokale Umkehrung müssen wir (nach Forster II Satz 3, Paragraph 8) zeigen, daß $DF(x, y)$ für alle $(x, y) \neq 0$ invertierbar ist. Da gilt

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix} \quad \text{und damit} \quad \det(DF(x, y)) = 4(x^2 + y^2)$$

folgt, daß $DF(x, y)$ für alle $(x, y) \neq 0$ invertierbar ist.

Die Funktion F ist aber nicht global invertierbar, denn F ist nicht injektiv: Ist $F(x, y) = (a, b)$, so gilt auch $F(-x, -y) = (a, b)$.

Nun wollen wir das Urbild eines beliebigen Punktes $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ bestimmen: Sei $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ beliebig. Wir suchen die Menge alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $F(x, y) = (a, b)$. Es gilt

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Longrightarrow 2xy = b.$$

Wir untersuchen nun zwei Fälle:

$b \neq 0$ *Dann gilt $y \neq 0$ und damit $x = \frac{b}{2y}$. Einsetzen in die erste Gleichung ergibt*

$$\begin{aligned} \frac{b^2}{4y^2} - y^2 = a \quad & \overset{y\neq 0}{\iff} \quad y^4 + ay^2 - \frac{b^2}{4} = 0 \\ & \implies \quad y^2 = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2+b^2}{4}} \\ & \overset{y^2>0}{\implies} \quad y^2 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2+b^2}{4}} \\ & \implies \quad y = \pm\sqrt{-\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \\ & \quad x = \pm\frac{b}{2\sqrt{-\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}}} \end{aligned}$$

$b = 0$ *Dann gilt $x = 0$ oder $y = 0$ (und $a \neq 0$). Ist $a > 0$, so muß $y = 0$ und $x = \pm\sqrt{a}$ gelten. Ist $a < 0$, so muß $x = 0$ und $y = \pm\sqrt{a}$ gelten.*

G 37 Stetigkeit

Es sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen den metrischen Räumen X und Y. Beweise die Äquivalenz folgender Bedingungen:

1. Das Urbild $f^{-1}(A)$ einer abgeschlossenen Teilmenge A von Y abgeschlossen in X ist.
2. $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ für alle Teilmengen $A \subset X$.
3. $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$ für alle Teilmengen $B \subset Y$.

(a) *Es sei A eine abgeschlossene Menge und $B = f^{-1}(A)$ das Urbild von A unter f. Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen $x = \lim_{n\to\infty}$ konvergente Folge mit $x_n \in B$, so folgt auf Grund der Stetigkeit $f(x) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$. Da A abgeschlossen ist, liegt dieser Grenzwert wieder in A, d.h. $f(x) \in A$ bzw. $\in f^{-1}(A) = B$. Somit ist auch B abgeschlossen.*

1. *Es sei f stetig. Da Urbilder abgeschlossener Manegen abgeschlossen sind, ist $f^{-1}(\overline{f(A)})$ abeschlossen. Aus $A \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$ folgt dann auch $\overline{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$ bzw. $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.*
   Gilt umgekehrt $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ für alle Teilmengen $A \subset X$, und ist $B \subset Y$ abgeschlossen, so folgt für $A = f^{-1}(B)$ auch $f(\overline{A}) = f(\overline{f^{-1}(B)}) \subset \overline{f(f^{-1}(B))} \subset \overline{B} = B$, d.h. $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(B)$ und somit ist $f^{-1}(B)$ abgeschlossen.
2. *Aus der Stetigkeit von f folgt $\overline{f^{-1}(\overline{B})} = f^{-1}(\overline{B})$ für alle Teilmengen $B \subset Y$, da Urbilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen sind. Mit $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(\overline{B})$ ergibt sich $\overline{f^{-1}(B)} \subset \overline{f^{-1}(\overline{B})} = f^{-1}(\overline{B})$.*
   Gilt umgekehrt $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$ für alle Teilmengen $B \subset Y$ und ist $B \subset Y$ abgeschlossen (d.h. $\overline{B} = B$) so folgt $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(B)$, und somit $\overline{f^{-1}(B)} = f^{-1}(B)$ und die Menge $f^{-1}(B)$ ist abgeschlosssen.

Hausübung

H 34 Picard-Iteration (3 Punkte)

Für $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ sei die Funktion

$$\Phi(x_1, x_2) \quad = \quad \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} \sin x_1 \cdot \cos x_2 + \arctan x_2 \\ \sin^2(x_1 + x_2 + 1) \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Zeige: Φ besitzt genau einen Fixpunkt $x^* \in \mathbf{R}^2$ und das Iterationsverfahren $x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)})$ konvergiert für jeden Startwert $x^{(0)} \in \mathbf{R}^2$ gegen x^*.

b) Wieviele Iterationsschritte muß man höchstens mit $x^{(0)} = (0,1)^T$ ausführen, um $\|x^{(k)} - x^*\|_\infty \leq \frac{1}{1024}$ sicherzustellen?

a) *Nachweis mit dem Banach'schen Fixpunktsatz:*

(i) *$B = \mathbf{R}^2$ ist abgeschlossen und $\phi(B) \subset B$.*

(ii) *Für die Kontraktionseigenschaft reicht es gemäß der Vorlesung zu zeigen: $\|\Phi'(x_1, x_2)\| < 1$ für $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$. In diesem Fall kann*

$$L := \max\{\|J_\Phi(x_1, x_2)\| \mid x_1, x_2 \in \mathbf{R}\}$$

gewählt werden.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}(x_1, x_2) &= \frac{1}{8} \cdot \cos x_1 \cdot \cos x_2 \\
\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2}(x_1, x_2) &= \frac{1}{8} \cdot (-\sin x_1 \cdot \sin x_2 + \frac{1}{1 + x_2^2}) \\
\frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) &= \frac{1}{4} \cdot \sin(x_1 + x_2 + 1) \cdot \cos(x_1 + x_2 + 1) \\
\frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2}(x_1, x_2) &= \frac{1}{4} \cdot \sin(x_1 + x_2 + 1) \cdot \cos(x_1 + x_2 + 1)
\end{aligned}$$

In der $\|\cdot\|_\infty$-Norm gilt für $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$:

$$\begin{aligned}
& \|\Phi'(x_1, x_2)\|_\infty \\
\leq\ & \tfrac{1}{8} \cdot \max\{|\cos x_1 \cdot \cos x_2| + |\sin x_1 * \sin x_2| + \tfrac{1}{1+x_2^2}, \\
& 4 \cdot |\sin(x_1 + x_2 + 1) \cdot \cos(x_1 + x_2 + 1)|\} \\
\leq\ & \tfrac{1}{8} \cdot \max\{1 + 1 + 1, 4\} = \tfrac{1}{2}
\end{aligned}$$

Eigenschaft (ii) des Banachschen Fixpunktsatzes gilt also mit der Konstante

$$L = \frac{1}{2} < 1.$$

b) *Aus dem Banach'schen Fixpunktsatz erhalten wir die a-piori-Abschätzung:*

$$\|x^{(k)} - x^*\|_\infty \leq \frac{L^k}{1 - L} \cdot \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty$$

$$x^{(1)} = \Phi(x^{(0)}) = (\frac{\pi}{32}, \sin^2(2))^T.$$

Es ist also

$$\|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty = \|(\frac{\pi}{32}, \sin^2(2) - 1)^T\|_\infty \leq 1$$

und mit L aus Aufgabe a) gilt:

$$\frac{1}{1 - L} = 2.$$

Setzt man dies in die rechte Seite der a-priori-Abschätzung ein, so kann die Forderung

$$\|x^{(k)} - x^*\|_\infty \leq \frac{1}{1024}$$

durch

$$2^{1-k} = 2 \cdot (\frac{1}{2})^k \leq 2^{-10} = \frac{1}{1024}$$

sichergestellt werden. Mit $k = 11$ Iterationsschritten ist die geforderte Genauigkeit also erreicht.

H 35 Umkehrfunktion (3 Punkte)

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$.

1. Zeigen Sie, daß f surjektiv ist. Bestimmen sie für einen Punkt $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ alle Urbilder.
2. Bestimmen sie alle Punkte $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ für die $Df(x, y)$ ein Isomorphismus ist.
3. Bestimmen sie in einer Umgebung des Punktes $(1, 0)$ eine lokale Inverse zu f.

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y,) = (x^2 - y^2, 2xy)$.

1. *Sei $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Wir machen eine Fallunterscheidung:*
   1. $v = 0$ In diesem Fall ist, je nach vorzeichen von u, $x = \sqrt{|u|}$ und $y = 0$ oder $y = \sqrt{|u|}$ und $x = 0$.
   2. $v \neq 0$ In diesem Fall muß $x, y \neq 0$ gelten. Wir erhalten daher $y = \frac{v}{2x}$ und somit $u = x^2 - \frac{v^2}{4x^2}$ oder $x^4 - x^2 u = \frac{v^2}{4}$. Die Lösungen sind $x^2 = \frac{u}{2} + \sqrt{\frac{v^2}{4} + \frac{u^2}{4}}$ bzw. $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{u}{2} + \sqrt{\frac{v^2}{4} + \frac{u^2}{4}}}$. Somit ist f surjektiv.
2. *Die Ableitung $Df(x, y)$ wird (bez. der kanonischen Basis) durch die Jacobimatrix*

$$\mathcal{J}_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \end{pmatrix}$$

   beschrieben. Die Determinante $\det\mathcal{J}_f = -4xy - 4xy = -8xy$ verschwindet nur auf den Koordinatenachsen. An den übrigen Punkten ist $\mathcal{J}$ invertierbar, d.h. die lineare Abbildung Df ist dort ein Isomorphismus.
3. *Mit (a) kann ist die Inverse lokal durch $f^{-1}(u, v) = (\sqrt{\frac{u}{2} + \sqrt{\frac{v^2}{4} + \frac{u^2}{4}}}, \frac{v}{2\sqrt{\frac{u}{2}+\sqrt{\frac{v^2}{4}+\frac{u^2}{4}}}})$ gegeben.*

H 36 Wo liegen Maxima? (4 Punkte)

Es sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $f : \overline{D} \to \mathbb{R}^n$ stetig und auf D stetig differenzierbar, so dass $f'(x)$ für alle $x \in D$ ein Isomorphismus ist. Zeige, dass $\|f\|$ sein Maximum nicht in D annehmen kann, also dass

$$\sup_{x \in \overline{D}} \|f(x)\| = \sup_{x \in \partial D} \|f(x)\|$$

gilt.

Angenommen das Maximum von $\|f\|$ wird einem Punkt $x \in D$ angenommen. Weil $df(x)$ invertierbar ist, läßt sich f in einer Umgebung $U \subset D$ von x umkehren. Das heißt, dass es eine Umgebung V von $f(x)$ gibt, so dass

$$f : U \to V$$

invertierbar ist. Aus der Definition von Umgebungen folgt, dass es ein $\delta > 0$ gibt, so dass $f(x) + \delta f(x) \in V$. Sei $y := f^{-1}(f(x) + \delta f(x))$. Dann gilt

$$\|f(y)\| = \|f(x) + \delta f(x)\| = (1 + \delta)\|f(x)\|.$$

Das widerspricht der Annahme, dass $\|f(x)\|$ maximal ist.