Analysis II für M, HLM, Ph

11. Übung
Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 32 Taylor-Entwicklung

Bestimme die Taylor-Entwicklung der Funktion

$$f\colon (0,\infty)\times(0,\infty)\to\mathbb{R},\quad f(x,y)=\frac{x-y}{x+y}$$

im Punkt $(1,1)$ bis einschließlich der Glieder 2. Ordnung.

Es gilt $f(x,y)=\frac{x+y-2y}{x+y}=1-2\frac{y}{x+y}$ *sowie* $f(x,y)=\frac{2x-(x+y)}{x+y}=2\frac{x}{x+y}-1$. *Daraus folgt:*

$$\begin{aligned}
D^{(1,0)}f(x,y) &= \partial_x f(x,y)=\frac{2y}{(x+y)^2}\\
D^{(0,1)}f(x,y) &= \partial_y f(x,y)=-\frac{2x}{(x+y)^2}\\
D^{(2,0)}f(x,y) &= \partial_x^2 f(x,y)=\frac{-4y}{(x+y)^3}\\
D^{(0,2)}f(x,y) &= \partial_y^2 f(x,y)=\frac{4x}{(x+y)^3}\\
D^{(1,1)}f(x,y) &= \partial_x\partial_y f(x,y)=\frac{2}{(x+y)^2}-\frac{4y}{(x+y)^3}=(2x-2y)/(x+y)^3.
\end{aligned}$$

Am Entwicklungspunkt $(1,1)$ *erhalten wir somit:*

$$f(1,1)=0,\quad D^{(1,0)}f(1,1)=\frac{1}{2},\quad D^{(0,1)}f(1,1)=-\frac{1}{2}$$

$$D^{(2,0)}f(1,1)=-\frac{1}{2},\quad D^{(0,2)}f(1,1)=\frac{1}{2},\quad D^{(1,1)}f(1,1)=0.$$

Die Glieder der Taylorreihe bis zur 2. Ordnung sind:

$$\begin{aligned}
&\sum_{|\alpha|\le 2}\frac{1}{\alpha!}D^\alpha f(1,1)((x_1,x_2)-(1,1))^\alpha\\
=\ & f(1,1)+D^{(1,0)}f(1,1)(x_1-1)+D^{(0,1)}f(1,1)(x_2-1)\\
&+D^{(1,1)}f(1,1)(x_1-1)(x_2-1)+\frac{1}{2}D^{(2,0)}f(1,1)(x_1-1)^2\\
&+\frac{1}{2}D^{(0,2)}f(1,1)(x_2-1)^2\\
=\ & \frac{1}{2}(x_1-1)-\frac{1}{2}(x_2-1)-\frac{1}{4}(x_1-1)^2+\frac{1}{4}(x_2-1)^2.
\end{aligned}$$

G 33 Extremstellen

Bestimme die kritischen Punkte von

$$f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x,y)=(x^2+y^2)((x-1)^2+y^2)$$

(d.h. die Punkte $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ mit $\operatorname{grad} f(x_0,y_0)=0$) und finde heraus, welche davon lokale Extremstellen sind.

Es gilt

$$\nabla f = \big(2x((x-1)^2+y^2)+(x^2+y^2)2(x-1), 2y((x-1)^2+y^2)+(x^2+y^2)2y\big).$$

Die kritischen Punkte müssen $\nabla f = (0,0)$ *erfüllen, wir setzen also*

$$\begin{array}{ll} (i) & 2x((x-1)^2+y^2)+(x^2+y^2)2(x-1) \overset{!}{=} 0 \\ (ii) & 2y((x-1)^2+y^2)+(x^2+y^2)2y \overset{!}{=} 0. \end{array}$$

Wir betrachten zunächst Fall (ii):

$$2y((x-1)^2+2y^2+x^2)) = 0 \overset{((x-1)^2+2y^2+x^2)>0}{\Longleftrightarrow} y = 0.$$

Für Fall (i) *ergibt sich dann durch einsetzen von* $y=0$

$$0 = 2x(x-1)^2+x^2 2(x-1) = 2x(x-1)(2x-1).$$

Die Lösungen sind also $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = 1$. *Also sind die kritischen Punkte*

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Um zu überprüfen, ob in diesen Punkten lokale Extremstellen vorliegen, bestimmen wir nun die Hesse-Matrizen für die entsprechendne Punkte. Für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *allgemein gilt*

$$\begin{aligned} &(\mathrm{Hess} f)(x,y) \\ = &\begin{pmatrix} 2((x-1)^2+y^2)+8x(x-1)+2(x^2+y^2) & 4y(2x-1) \\ 4y(2x-1) & 2((x-1)^2+y^2)+8y^2+2(x^2+y^2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Für die kritischen Punkte folgt also

$$\begin{aligned} (\mathrm{Hess} f)(0,0) &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \\ (\mathrm{Hess} f)(1,0) &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \\ (\mathrm{Hess} f)(\frac{1}{2},0) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Da $\langle v, (\mathrm{Hess} f)(0,0)v\rangle = 2 \cdot \|v\|_2^2 > 0$ *für* $v \neq 0$ *sind* $(\mathrm{Hess} f)(0,0)$ *und* $(\mathrm{Hess} f)(1,0)$ *positiv definit. Nach Satz 4 in Paragraph 7 liegt damit bei*

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ein lokales Minimum vor. Da $\langle v, (\mathrm{Hess} f)(\frac{1}{2},0)v\rangle = -v_1 + v_2$ *(wobei* $v = (v_1, v_2)^T$*), also insbesondere* $\langle v, (\mathrm{Hess} f)(\frac{1}{2},0)v\rangle > 0$ *für* $v = (0,1)^T$ *und* $\langle v, (\mathrm{Hess} f)(\frac{1}{2},0)v\rangle < 0$ *für* $v = (1,0)^T$ *ist* $(\mathrm{Hess}(f))(\frac{1}{2},0)$ *indefinit und es liegt keine lokale Extremstelle vor.*

G 34 Hessematrix

Untersuche in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$, ob die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = x^n + y^n,$$

im Punkt $(0,0)$ ein lokales Minimum oder Maximum hat. Ist die Hessematrix $(\mathrm{Hess} f)(0,0)$ im Fall einer Extremstelle positiv bzw. negativ (semi-)definit? Ist die Hessematrix im Fall, dass keine lokale Extremstelle vorliegt, indefinit? Wiederspricht dies den Aussagen der Vorlesung über notwendige und hinreichende Kriterien von lokalen Extremstellen?

Es gilt $\nabla f(x,y) = (nx^{n-1}, ny^{n-1})$. *Für* $n \geq 2$ *liegt also bei* $(0,0)$ *eine kritische Stelle vor.*

> *Ist* n **gerade**, *so gilt für alle* $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *daß* $f(x,y) > 0$. *Da für* $n \geq 2$ *gilt* $f(0,0) = 0$, *liegt ein isoliertes Minimum vor.*
>
> *Ist* n **ungerade**, *so gilt für alle* $\varepsilon > 0$ *daß* $f(\varepsilon, \varepsilon) > 0$ *und* $f(-\varepsilon, -\varepsilon) < 0$. *Bei* $(0,0)$ *liegt also keine lokale Extremstelle vor.*

Die Hessematrix in $(0,0)$ *ist*

$$
\begin{aligned}
(\mathit{Hess}(f))(x,y)|_{(x,y)=(0,0)} &= \begin{pmatrix} n(n-1)x^{n-2} & 0 \\ 0 & n(n-1)x^{n-2} \end{pmatrix}\Big|_{(x,y)=(0,0)} \\
&= \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{falls } n \geq 3 \\ \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} & \text{falls } n = 2. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Die Hessematrix ist also nur im Fall $n = 2$ *positiv definit. In diesem Fall liegt auch ein lokales Minimum vor. In allen anderen Fällen ist sie positiv (und negativ) semidefinit. Es gibt also Fälle, in denen die Hessematrix positiv semidefinit ist, aber kein lokales Minimum vorliegt. Dies widerspricht natürlich nicht den Aussagen der Vorlesung, da die Bedingung war, daß die Hessematrix in dem entsprechenden Punkt positiv definit ist. Ausserdem gibt es Fälle, in denen ein Minimum vorlieg (nämlich* n *gerade und größer als 2), in denen die Hessematrix nicht positiv definit ist. Das liegt daran, dass die positive Definitheit zwar ein hinreichendes Kriterium ist, aber nicht notwendig. Schliesslich zeigt die Aufgabe, daß die Indefinitheit von* $(\mathit{Hess} f)$ *in einem Punkt keine notwendige Bedingung dafür ist, daß keine lokale Extremstelle vorliegt.*

Hausübung

H 31 Taylorpolynom (3 Punkte)

Wir betrachten zwei Funktionen f und g, die wie folgt definiert sind:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = x^2 \sin(xy/2)$$

$$g : \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \backslash \{0\}) \to \mathbb{R},\ g(x,y) = x^2 - \cos(x/y).$$

a) Berechnen Sie das Taylorpolynom 2. Grades von f mit der Entwicklungsstelle $(1, \pi)$ (ohne das Restglied zu bestimmen).

b) Entwickeln Sie g um den Punkt $(\pi, 1)$ mit der Taylorformel mit $m = 2$ (ohne das Restglied zu bestimmen).

c) Vergleichen Sie die Funktionswerte $f(1.1, \pi)$ und $g(\pi + 0.1, 0.8)$ mit den entsprechenden Näherungswerten aus der Taylorentwicklung.

a) Berechnung der nötigen partiellen Ableitungen:

$f_x(x,y) = 2x \sin(xy/2) + x^2(y/2)\cos(xy/2)$,

$f_y(x,y) = (x^3/2)\cos(xy/2)$

$f_{xx}(x,y) = 2\sin(xy/2) + 2xy\cos(xy/2) - (1/4)x^2y^2\sin(xy/2)$

$f_{xy}(x,y) = (3/2)x^2\cos(xy/2) - (1/4)x^3y\sin(xy/2) = f_{yx}(x,y)$.

$f_{yy}(x,y) = -x^4/4\sin(xy/2)$.

Also ist das Taylorpolynom zweiten Grades um $(1,\pi)$

$$\begin{aligned} T_f(1+h,\pi+k) &= f(1,\pi) + hf_x(1,\pi) + kf_y(1,\pi) \\ &\quad +(1/2)[h^2 f_{xx}(1,\pi) + 2hkf_{xy}(1,\pi) + k^2 f_{yy}(1,\pi)] \\ &= 1 + 2h + (1-\pi^2/8)h^2 - (\pi/4)hk - (1/8)k^2 \end{aligned}$$

b) Berechnung der nötigen partiellen Ableitungen: $g_x(x,y) = 2x + (1/y)\sin(x/y)$,

$g_y(x,y) = -x/y^2 \sin(x/y)$

$g_{xx}(x,y) = 2 + (1/y^2)\cos(x/y)$

$g_{xy}(x,y) = -(1/y^2)\sin(x/y) - (x/y^3)\cos(x/y) = g_{yx}(x,y)$.

$g_{yy}(x,y) = (2x/y^3)\sin(x/y) + (x^2/y^4)\cos(x/y)$.

Also ist das Taylorpolynom zweiten Grades um $(\pi,1)$

$$\begin{aligned} T_g(\pi+h,1+k) &= g(\pi,1) + hg_x(\pi,1) + kg_y(\pi,1) \\ &\quad +(1/2)[h^2 g_{xx}(\pi,1) + 2hkg_{xy}(\pi,1) + k^2 g_{yy}(\pi,1)] \\ &= \pi^2 + 1 + 2\pi h + (1/2)h^2 + \pi hk - (\pi^2/2)k^2 \end{aligned}$$

c) $f(1.1,\pi) = 1.1951....$

$g(\pi+0.1, 0.8) = 11.1214...$

$T_f(1+0.1,\pi+0) = 1.1977...$

$T_g(\pi+0.1, 1-0.2) = 11.2427...$

H 32 Der Affensattel (3 Punkte)

Wir betrachten die Funktion $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3 - 3xy^2$.

1. Bestimme die Ableitung Df von f.
2. Bestimme die Hessematrix $H_f = (\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j})_{i,j}$ an der Stelle 0.
3. Ist H_f positiv definit, indefinit oder negativ definit?
4. Hat die Funktion f an der Stelle 0 ein Extremum?

Wir betrachten die Funktion $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3 - 3xy^2$.

1. $\mathcal{J}_f = (3x^2 - 3y^2, -6xy) = 3(x^2 - y^2, -6xy)$
2. $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -6y \\ -6y & -6x \end{pmatrix}$, $H_f(0,0) = \mathbf{0}$
3. *Die Hessematrix ist semi-definit.*
4. *Nein, dies ist ein Sattelpunkt, da* $f(\epsilon,0) > 0, f(-\epsilon,0) < 0$ *ist.*

H 33 Quadriken (4 Punkte)

Es sei A eine positiv definite reelle $n\times n$-Matrix und $b \in \mathbb{R}^n$ mit $b \neq 0$.

1. Zeigen Sie, daß A invertierbar und A^{-1} positiv definit ist.

2. Es sei $Q := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^T Ax = 1\}$ die sog. Kennlinie von A. Zeigen Sie, daß die Funktion $x \mapsto \langle b, x\rangle$ auf Q genau ein globales Minimum und genau ein globales Maximum hat.

1. *Da die Matrix A Symmetrisch ist, läßt sie sich diagonalisieren. $TAT^{-1} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Die Eigenwerte λ_i müssen alle positiv sein, da A positiv definit ist. Somit ist $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ invertierbar und es gilt $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^{-1} = \mathrm{diag}(\lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_n 1^{-1})$. Damit folgt $A = T^{-1}\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)T$ und $A^{-1} = T^{-1}\mathrm{diag}(\lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1})T$. Somit ist auch A^{-1} positiv definit.*
2. *Da die Matrix A positiv definit ist, ist die Kennlinie Q ein Ellipsoid (die Einheitskugel wird hier um die Faktoren $\sqrt{\lambda_i}$ in Richtung der i-ten Koordinatenachse gestaucht.) Dies kennlinie ist somit beschränkt und als Urbild der abgeschlossenen Menge $\{0\}$ unter einer stetigen Abbildung auch wieder abgeschlossen, mithin kompakt. Somit nimmt die stetige Abbildung $x \mapsto \langle b, x\rangle$ auf dieser Menge ihr Maximum und ihr Minimum an.*