Analysis II für M, HLM, Ph

10. Übung
Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 28 Jacobi-Matrix

Gegeben seien die Funktionen $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ und $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $g(x, y, z) := (x^2+y^2+z, xyz)$ bzw. $h(u, v) := (e^v, e^u)$. Bestimme die Jacobi-Matrizen J_g, J_h und $J_{h\circ g}$.

$$J_g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 1 \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}, \quad J_h(u,v) = \begin{pmatrix} 0 & e^v \\ e^u & 0 \end{pmatrix}$$

$$(h \circ g)(x,y,z) = (e^{xyz}, e^{x^2+y^2+z})$$

$$J_{h\circ g}(x,y,z) = \begin{pmatrix} yze^{xyz} & xze^{xyz} & xye^{xyz} \\ 2xe^{x^2+y^2+z} & 2ye^{x^2+y^2+z} & e^{x^2+y^2+z} \end{pmatrix} = J_h \cdot J_g$$

G 29 Bilineare Funktionen

Eine bilineare Funktion ist eine Abbildung

$$f \colon E \times F \to G,$$

so dass für jedes (fest gewählte) x aus E und y aus F die partiellen Abbildungen

$$f(x, \cdot) : F \to G$$

und

$$f(\cdot, y) : E \to G$$

lineare Abbildungen sind.

Es sei $\beta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine bilineare Funktion.

1. Zeige, dass die Ableitung von β im Punkt (x, y) durch $\beta'(x, y)(v, w) = \beta(x, w) + \beta(v, y)$ gegeben ist.
2. Beweise, dass $\beta' : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ eine lineare Abbildung ist.
3. Ist β stetig differenzierbar?

1. *Es gilt $\beta(x+v, y+w) = \beta(x, y+w)+\beta(v, y+w) = \beta(x, y)+\beta(x, w)+\beta(v, y)+\beta(v, w)$. Somit folgt $\beta(x + v, y + w) - \beta(x, y) - (\beta(x, w) + \beta(v, y)) = \beta(v, w)$. Da*

   $$\frac{|\beta(v,w)|}{\|(v,w)\|} \le C \frac{\|v\| \cdot \|w\|}{\max(\|v\|, \|w\|)} \to 0, \qquad \|(v,w)\| \to 0,$$

   und die Funktion $(v, w) \mapsto \beta(x, w) + \beta(v, y)$ für festes (x, y) linear ist, ist sie auch das Differential $\beta'(x, y)$ an der Stelle (x, y).
2. *Nachrechnen zeigt, daß $\beta' : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ eine lineare Abbildung ist.*
3. *Ja, denn das Differential $\beta' : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist nach (a) eine Summe von zwei linearen und daher stetigen Funktionen. Somit ist auch β' stetig.*

G 30 Differenzierbarkeit und Richtunsableitungen

Zeige, dass alle Richtungsableitungen der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = 0$ und

$$f(x,y) = x^2y/(x^4+y^2) \qquad (x,y) \neq (0,0)$$

im $(0,0)$ existieren aber die Funktion f trotzdem nicht differenzierbar in diesem Punkt ist. Wo liegt das Problem?

Sei $u = (h,k) \neq 0$. Dann

$$\frac{f(0+tu)-f(0)}{t} = \frac{(th)^2(tk)}{(th)^4+(tk)^2}\frac{1}{t} = \frac{h^2k}{t^2h^4+k^2},$$

also

$$D_u f(0) = \begin{cases} h^2/k & k \neq 0 \\ 0 & k = 0 \end{cases}.$$

Wäre f differenzierbar im $(0,0)$ mit $f'(0) = (a,b)^T$, müsste die Gleichheit

$$D_u f(0) = f'(0) \cdot u = ah + bk$$

gelten. D.h. die Abbildung $u \mapsto D_u f(0)$ muss linear bezüglich u sein, was nicht der Fall ist. Die Funktion f kann nicht differenzierbar im $(0,0)$ sein, da sie im $(0,0)$ unstetig ist (Beweise es! (Betrachte zwei Folgen $M = (x_n, 0)$ und $M' = (x_n, x_n^2)$.)).

G 31 Ableitung

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei

$$f : U \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m).$$

Was heißt, f sei an der Stelle $x_0 \in U$ differenzierbar? Man gebe die Definition der Ableitung an.

$L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ besteht aus den linearen Abbildungen des $\mathbb{R}^n$ in den $\mathbb{R}^n$; bezogen auf die Standardbasen handelt es sich um die $n \times m$ Matrizen. Daher ist $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ ein $n \cdot m-$dimensionaler reeller Vektorraum. Versehen mit der Operatornorm ist $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ ein Banachraum.
Dann heißt die Abbildung $f : U \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ differenzierbar an der Stelle $x_0 \in U$, wenn es eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ und eine an der Stelle x_0 stetige Abbildung $r : U \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ gibt derart, dass für alle $x \in U$ gilt

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + r(x)\|x - x_0\|_{\mathbb{R}^n}$$

und

$$\lim_{x \to x_0} r(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \|r(x)\|_{L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)} = 0.$$

Die lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ heißt die Ableitung von f an der Stelle $x_0 \in U$, d.h. $A = f'(x_0)$.
Wenn f an jeder Stelle $x_0 \in U$ differenzierbar ist, dann die Ableitung f' eine Abbildung von U nach $L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$ ist, d.h.

$$f' : U \to L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)).$$

Hausübung

H 28 Kettenregel in Koordinaten (3 Punkte)

Es seien $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ differenzierbare Funktionen.

1. Beschreiben sie die Kettenregel $D(f \circ g)(x) = Df(g(x)) \circ Dg(x)$ in den kanonischen Koordinaten, d.h. durch die Jacobimatrizen $(\frac{\partial f_i}{\partial x_j})_{i,j}$ und $(\frac{\partial g_i}{\partial x_j})_{i,j}$.

2. Es seien $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ bzw. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ durch $g(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2, x_1 x_2)$ und $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x^2 - x_3^2$ gegeben.
   Wie lautet nach (1) die Formel für die Ableitung $D(f \circ g)$? Berechne die Richtungsableitungen von $f \circ g$ an der Stelle $(1, 1)$ in die Richtungen $(3, 0)$ und $(5, 5)$.

1. Die Werte $D(f \circ g)(x)(v)$ sind durch die Richtungsableitung von $f \circ g$ in Richtung v gegeben. Es folgt

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial (f\circ g)_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial (f\circ g)_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial (f\circ g)_l}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial (f\circ g)_l}{\partial x_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_l}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_l}{\partial x_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}, \text{ d.h.} \mathcal{J}_{f\circ g} = \mathcal{J}_f \cdot \mathcal{J}_g$$

2.

$$\mathcal{J}_f = \nabla f = (2x_1, 2x_2, -2x_3) \quad \mathcal{J}_g = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{f\circ g}(x_1, x_2) = \mathcal{J}_f(g(x_1, x_2) \cdot \mathcal{J}_g(x_1, x_2) &= (2(x_1 - x_2), 2(x_1 + x_2), -2(x_1 x_2)) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix} \\ &= (4x_1 - 2x_1 x_2^2, 4x_2 - 2x_1^2 x_2) \end{aligned}$$

$Df(1, 1)(3, 0) = 6$ *und* $Df(1, 1)(5, 5) = 20.$

H 29 Die Richtungsableitung der Exponentialfunktion (2 Punkte)

Wir betrachten den Banachraum

$$V = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n),$$

wobei wir lineare Abbildungen A mit der zugehörigen Matrix bezüglich der kanonischen Basis identifizieren. Die Matrixexponentialfunktion $\exp : V \to V$ ist durch

$$\exp(A) = \sum_{k=0} \frac{1}{k!} A^k$$

gegeben. Berechne die Richtungsableitung der Matrixexponentialabbildung in Richtung A am Punkt $\mathbf{0}$ (d.h. bei der Nullabbildung).

Hinweis: Dies geschieht analog zum Beweis für die reelle Exponentialfunktion.

Es gilt

$$\exp(A) - \exp(\mathbf{0}) = \sum_{k=0} \frac{1}{k!} A^k - A^0 = \sum_{k=1} \frac{1}{k!} A^k.$$

Somit folgt

$$\lim_{t\to 0} \frac{\exp(tA) - \exp(\mathbf{0})}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sum_{k=1} \frac{1}{k!} t^k A^k}{t} = \lim_{t\to 0} A + \frac{\sum_{k=2} \frac{1}{k!} t^k A^k}{t} = A.$$

H 30 Homogene Funktionen (4 Punkte)

Eine Funktion auf dem k-dimensionalen reellen Vektorraum

$$\Phi : \mathbb{L}^k \to \mathbb{L}$$

heißt homogen vom Grad n genau dann, wenn für alle $\alpha, x_i \in \mathbb{R}$ gilt

$$\Phi(\alpha x_1, \ldots, \alpha x_k) = \alpha^n \cdot \Phi(x_1, \ldots, x_k).$$

Sei $(x, y, z) \mapsto u(x, y, z)$ eine zwei mal differenzierbare Funktion, die homogen vom Grad n ist. Beweise, dass

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 u = n(n-1)u.$$

Hinweise:

· Jede homogene Funktion erfüllt die Gleichheit

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = nu.$$

· $\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 := \left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right).$

· $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z}$ ist die Richtungsableitung von u in Richtung von (x, y, z).

Da u eine homogene vom Grad n Funktion ist, erfüllt sie die Gleichheit (leite nach t die Gleichheit $u(tx, ty, yz) = t^n u(x, y, z)$ ab!)

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = nu.$$

Sei (x_0, y_0, z_0) ein beliebiger Punkt in $\mathbb{R}^3$. Wir setzen nun in der letzten Gleichheit $(x, y, z) = (tx_0, ty_0, tz_0)$ ein und leiten die erhaltene Gleichung nach t ab:

$$x_0u'_x + y_0u'_y + z_0u'_z + tx_0^2u''_{xx} + ty_0^2u''_{yy} + tz_0^2u''_{zz} + t(2x_0y_0u''_{xy} + 2x_0z_0u''_{xz} + 2y_0z_0u''_{yz}) = n(x_0u'_x + y_0u'_y + z_0u'_z).$$

Für $t = 1$ erhalten wir:

$$x_0^2u''_{xx} + y_0^2u''_{yy} + z_0^2u''_{zz} + (2x_0y_0u''_{xy} + 2x_0z_0u''_{xz} + 2y_0z_0u''_{yz}) = (n-1)(x_0u'_x + y_0u'_y + z_0u'_z)$$

oder

$$\left(x_0\frac{\partial}{\partial x} + y_0\frac{\partial}{\partial y} + z_0\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 u = n(n-1)u.$$