Analysis II für M, HLM, Ph

9. Übung
Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 25 Differenzierbarkeit

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) := \begin{cases} (x^2+y^2) \cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{für } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{für } (x,y) = 0 \end{cases}$$

gegeben. Zeige

- $\frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $\frac{\partial}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ existieren, sind aber im Nullpunkt nicht stetig.
- f ist im Nullpunkt differenzierbar.

Sei $(x,y) \neq (0,0)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x \sin(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}) + (x^2+y^2)\cos(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})(-\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}^3}) \\ &= 2x\sin(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}) - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}). \end{aligned}$$

Sei $y = 0$. Dann hat man

$$\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \frac{h^2 \sin\frac{1}{|h|}}{h} = h \sin\frac{1}{|h|} \xrightarrow{h\to 0} 0.$$

Somit ist existiert die partielle Ableitung nach x.
Sei $a_n = (\frac{1}{2n\pi}, 0)$. Dann gilt $a_n \to (0,0)$ aber

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a_n) = 0 - \cos 2n\pi = 1 \xrightarrow{n\to\infty} 1 \neq 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0).$$

Also ist $\frac{\partial f}{\partial x}$ unstetig. Für die Ableitung nach y geht alles genauso.
Wir zeigen nun, dass die Ableitung 0 ist. Es gilt für $h = (h_1,h_2) \neq (0,0)$

$$\frac{f(h)}{\|h\|} = \frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\left|(h_1^2+h_2^2)\cdot\sin\left(\frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\right)\right| \leq \sqrt{h_1^2+h_2^2} \xrightarrow{h\to 0} 0$$

Also gilt

$$f(0+h) = 0 + 0h + f(h) = f(0,0) + df(0,0)h + f(h)$$

und f ist in $(0,0)$ differenzierbar.

G 26 Partielle Differenzierbarkeit

Die Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$F(x,y) := \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zeige, dass F überall zweimal partiell differenzierbar ist, dass aber gilt $(D_2D_1F)(0,0) \neq (D_1D_2F)(0,0)$.

Wir berechnen einfach die ersten partiellen Ableitungen für $(x,y) \neq (0,0)$ (über die Produktregel):

$$\begin{aligned}(D_1F)(x,y) &= y \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}\\ (D_2F)(x,y) &= x \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\frac{-4xy^2}{(x^2+y^2)^2}.\end{aligned}$$

Für $(x,y) \neq (0,0)$ kann man offensichtlich jeweils in ähnlicher Weise die Ableitung nach x bzw. y bestimmen. Die Funktion F ist also zweimal partiell differenzierbar. Nun bestimmen wir die Ableitungen in $(0,0)$: Es gilt

$$\begin{aligned}(D_2D_1F)(0,0) &= (D_2(D_1F))(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{(D_1F)(0,h)-(D_1F)(0,0)}{h}\\ (D_1D_2F)(0,0) &= (D_1(D_2F))(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{(D_2F)(h,0)-(D_2F)(0,0)}{h}\end{aligned}$$

Wir bestimmten also zunächst $(D_1F)(0,0)$ und $(D_2F)(0,0)$:

$$(D_1F)(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{F(h,0)-F(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0$$

und ebenso $(D_2F)(0,0) = 0$. Zusammen mit den berechneten ersten partiellen Ableitungen von f (siehe oben) folgt dann

$$(D_2D_1F)(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{h\cdot\frac{0-h^2}{0+h^2}+0-0}{h} = -1$$

und

$$(D_1D_2F)(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{h\cdot\frac{h^2-0}{h^2+0}+0-0}{h} = 1.$$

G 27 Kettenregel

Seien $X \subset \mathbb{R}^k$ offen und $Y \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei $f : \overline{X\times Y} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf $X \times Y$ differenzierbar ist.

Berechne in jedem Punkt $x \in X$ die Ableitung der Funktion

$$m(x) = \min_{y\in\bar{Y}} f(x,y) = f(x,\xi(x)),$$

wobei $\xi : X \to \mathbb{R}^n$ mit $\mathrm{im}(\xi) \subset Y$ eine stetig differenzierbare Funktion ist.

Let $Df = (\partial_1 f,\ldots,\partial_k f,\partial_{k+1}f,\ldots,\partial_{k+n}f) = (D_xf, D_yf)$ and $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{k+n},\ x \mapsto (x,\xi(x))$. Then

$$Dg = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\\ \partial_1\xi_1 & \cdots & \cdots & \partial_k\xi_1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \partial_1\xi_n & \cdots & \cdots & \partial_k\xi_n\end{pmatrix}.$$

Therefore we get by using the chain rule for any $v \in \mathbb{R}^k$

$$\begin{aligned} Dm(x)v &= Df(g(x))v = Df(g(x)Dg(x)v \\ &= D_x f(g(x))v + D_y f(g(x))D\xi(x)v \\ &= \left(\partial_i f(g(x))v_i + \sum_{l=1}^{n} \partial_l f(g(x))\partial_i \xi(x) v_i\right)_{i=1}^{m} \end{aligned}$$

Hausübung

H 25 Lösung der Wärmeleitungsgleichung (2 Punkte)

Zeige, dass die Funktion

$$F(x,t) := t^{\frac{-n}{2}} e^{\frac{-\|x\|^2}{4t}} \text{ für } x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}^+$$

eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist[1], d.h. sie erfüllt

$$\Delta F - \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \, .$$

Wir berechnen erst einmal das Bild des Laplace-Operator von F: Um $\Delta F = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial^2 x_i}$ zu bestimmen, müssen wir zunächst jeweils die zweiten partiellen Ableitungen bestimmen. Also erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_i} &= t^{\frac{-n}{2}} e^{\frac{-\|x\|^2}{4t}} \cdot \left(\frac{-\|x\|}{2t} \cdot \frac{x_i}{\|x\|}\right) = t^{\frac{-n}{2}} e^{\frac{-\|x\|^2}{4t}} \cdot \frac{-x_i}{2t} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial^2 x_i} &= t^{\frac{-n}{2}} e^{\frac{-\|x\|^2}{4t}} \cdot \left(\frac{x_i^2}{(2t)^2} - \frac{1}{2t}\right) \\ \Delta F &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial^2 x_i} = t^{\frac{-n}{2}} e^{\frac{-\|x\|^2}{4t}} \cdot \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{(2t)^2} - \frac{n}{2t}\right) = t^{\frac{-n}{2}} e^{\frac{-\|x\|^2}{4t}} \cdot \left(\frac{\|x\|^2}{4t^2} - \frac{n}{2t}\right) \end{aligned}$$

Jetzt leiten wir F noch nach t ab:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = e^{\frac{-\|x\|^2}{4t}} \left(\frac{n}{2t} t^{-\frac{n}{2}} + t^{-\frac{n}{2}} \frac{-\|x\|^2}{4t^2}\right) = t^{\frac{-n}{2}} e^{\frac{-\|x\|^2}{4t}} \cdot \left(\frac{\|x\|^2}{4t^2} - \frac{n}{2t}\right).$$

Offensichtlich gilt $\Delta F - \frac{\partial F}{\partial t} = 0$.

H 26 Kettenregel (3 Punkte)

1. Berechne die Ableitungen folgender Funktionen:
   (a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (xy, \cosh(xy), \log(1+x^2))$
   (b) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $g(x,y,z) = (x\sin(y)\cos(z), x\sin(y)\sin(z), x\cos(y))$
2. Sei $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$h(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   Gebe alle Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, in denen h differenzierbar ist, an.

[1] $\Delta u(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u(x)$.

(i)(a)

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} y & x \\ y\sinh(xy) & x\sinh(xy) \\ \frac{2x}{1+x^2} & 0 \end{pmatrix}$$

(b):

$$Dg(x,y,z) = \begin{pmatrix} \sin(y)\cos(z) & x\cos(y)\cos(z) & -x\sin(y)\sin(z) \\ \sin(y)\sin(z) & x\cos(y)\sin(z) & x\sin(y)\cos(z) \\ \cos(y) & x & 0 \end{pmatrix}$$

(ii): Für $(x,y) \neq (0,0)$ erhalten wir

$$\partial_1 h(x,y) = \frac{3x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x^4}{\sqrt{x^2+y^2}^3}$$

und

$$\partial_2 h(x,y) = \frac{-x^3 y}{\sqrt{x^2+y^2}^3}.$$

Da für $(x,y) \neq (0,0)$ die partiellen Ableitungen stetig sind, bekommen wir, dass f differenzierbar in (x,y) ist.

Für $(x,y) = (0,0)$ erhalten wir

$$\partial_1 h(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{h(t,0)-h(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^3}{\sqrt{t^2}} = 0$$

und

$$\partial_2 h(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{h(0,t)-h(0,0)}{t} = \frac{0}{t} = 0.$$

Dann

$$\frac{h(x,y)-h(0,0)-((0,0)|(x,y))}{\|(x,y)\|} = \frac{x^3}{x^2+y^2} \to 0 \qquad \text{for } (x,y) \to (0,0)$$

bekommen wir, dass h differenzierbar in $(0,0)$ ist.

H 27 Differenzierbarkeit und Stetigkeit (4 Punkte)

Zeige, dass die Funktion $(x,y) \mapsto f(x,y)$, die stetig bezüglich x für jedes feste y ist und die beschränkte Ableitung bezüglich y hat, stetig ist.

Sei $\epsilon > 0$ beliebig ausgewählt und (x_0,y_0) ein Punkt, in dem f definiert ist. Dann

$$|f(x,y) - f(x_0,y_0)| \le |f(x,y) - f(x,y_0)| + |f(x,y_0) - f(x_0,y_0)|$$
$$\le |f'(x, y_0 + \theta(y-y_0))| \cdot |y-y_0| + |f(x,y_0) - f(x_0,y_0)|.$$

Da $x \mapsto f(x,y)$ für jedes feste y stetig ist, erhalten wir

$$|f(x,y_0) - f(x_0,y_0)| < \epsilon/2,$$

falls $|x-x_0| < \delta_1$ ist.
Deswegen es gilt ($|f'(x,y)| \le M$)

$$|f(x,y) - f(x_0,y_0)| \le M|y-y_0| + \epsilon/2 < \epsilon,$$

falls $|x-x_0| < \delta$ und $|y-y_0| < \delta$, wobei $\delta := \min\{\epsilon/(2M), \delta_1\}$ ist.