Analysis II für M, HLM, Ph

8. Übung
Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 22 Partiell aber nicht total differenzierbar

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) := \sqrt{|xy|}$.

Zeige: f ist stetig und partiell differenzierbar im Punkt $(0, 0)$, aber die Funktion ist in $(0, 0)$ nicht total differenzierbar.

Die Funktion $f(x, y) = \sqrt{|xy|} = \sqrt{|x|}\sqrt{|y|}$ is als Produkt zweier stetiger Funktionen wieder stetig, also insbesondere im Punkt $(0, 0)$ stetig. Die partiellen Ableitungen im Punkt $(0, 0)$ können nur mit Hlfe der Definition berechnet werden:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0.\end{aligned}$$

Beide partiellen Ableitungen sind im Punkt $(0, 0)$ gleich 0. Wäre f differenzierbar im Punkt $(0, 0)$, dann würde für die Jacobi-Matrix gelten: $J_f(0, 0) = (0, 0)$, und es müßte für ein $\varphi(h, k)$ mit $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\varphi'(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0$ die Gleichung

$$f(h, k) = f(0, 0) + J_f \cdot (h, k) + \varphi(h, k)$$

erfüllt sein. Einsetzen ergibt

$$\sqrt{|xy|} = 0 + 0 + \varphi(h, k),$$

also $\varphi(h, k) = \sqrt{|hk|}$. Wählt man nun die Folge $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, dann gilt sicherlich $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = (0, 0)$, aber

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\varphi(\frac{1}{n},\frac{1}{n})}{\|(\frac{1}{n},\frac{1}{n})\|} = \frac{\sqrt{\frac{1}{n^2}}}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0.$$

Also kann f im Nullpunkt nicht differenzierbar sein.

G 23 Partiell differenzierbar aber nicht stetig

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \cdot y = 0 \\ 0 & \text{für } x \cdot y \neq 0 \end{cases}.$$

Zeige:

- f ist im Nullpunkt partiell differenzierbar.
- f ist im Nullpunkt nicht stetig.

Es gilt $f(x, 0) = 1$ also $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$ und $f(0, y) = 1$, also $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$. Es gilt aber auch $f(0, 0) = 1$ und $\lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0 \neq 1 = f(0, 0)$.

G 24 Richtungsableitung

Es sei $V = C([0, 1], \mathbb{R})$ der Vektorraum der stetigen reellen Funktionen auf dem Einheitsintervall versehen mit der Supremumsnorm. Wie lautet die Richtungsableitung der Funktion $f \mapsto f^2$ in Richtung $h \in V$ am Punkt $f \in V$?

$\lim_{t\to 0} \frac{(f+th)^2-f^2}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{(f^2+2tfh+t^2h^2-f^2}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{2tfh+t^2h^2}{t} = 2fh.$

Hausübung

H 22 $C([a,b])$: ein unendlichdimensionaler Banachraum (3 Punkte)

Zeige, dass $\big(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty\big)$ ein Banachraum ist.

Sei $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ eine Cauchyfolge in $C([a,b])$. Dann nach dem Satz auf der Seite 141 im Skript Ana I diese Funktionenfolge gleichmäßig konvergenz ist und die Grenzfunktion stetig auf $[a,b]$ ist. Deswegen ist $C([a,b])$ ein Banachraum.

H 23 Parameterabhängige Integrale (3 Punkte)

Es sei $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{(x^2+y^2)^2}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Man zeige, daß für jedes $y \in \mathbb{R}$ die Integrale

$$f(y) := \int_0^1 g(x,y)dx \text{ und } f^*(y) := \int_0^1 D_2 g(x,y)dx$$

wohldefiniert sind, und daß die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist, jedoch $f'(0) \neq f^*(0)$ gilt.

Wir bestimmen zunächst $D_2 g(x,y)$: Für $x \neq (0,0)$ erhalten wir unter Benutzung der Quotientenregel

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{xy^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{3x^3y^2 - xy^4}{(x^2+y^2)^3},$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}g(0,h) = 0.$$

Also gilt für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$D_2 g(x,y) = \begin{cases} \frac{3x^3y^2-xy^4}{(x^2+y^2)^3} & \textit{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \textit{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Damit ist für $y \neq 0$ die Funktion f^* differenzierbar, denn

$$f^*(y) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} g(x,y)dx = \int_0^1 \frac{3x^3y^2 - xy^4}{(x^2+y^2)^3}dx$$

existiert, da der Integrand als rationale in ganz $[0,1]$ definierte Funktion stetig ist. Ausserdem gilt

$$f^*(0) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} g(x,0)dx = \int_0^1 0dx = 0.$$

Nun bestimmen wir f': Für $y \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned} f(y) &= \int_0^1 g(x,y)dx = \int_0^1 \frac{xy^3}{(x^2+y^2)^2}dx = \Big[-\frac{y^3}{2(x^2+y^2)}\Big]_{x=0}^{x=1} \\ &= \frac{y^3}{2y^2} - \frac{y^3}{2(1+y^2)} = \frac{y}{2(1+y^2)}, \\ f(0) &= \int_0^1 g(x,0)\,dx = \int_0^1 0\,dx = 0. \end{aligned}$$

Also gilt

$$f(y) \quad = \quad \begin{cases} \frac{y}{2(1+y^2)} & \text{falls } y \neq 0 \\ 0 & \text{falls } y = 0. \end{cases}$$

Für $y \neq 0$ ist f trivialerweise differenzierbar, für $y = 0$ erhält man für f':

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{2(h^2+1)} = \frac{1}{2}.$$

Insbesondere erhält man also $f'(0) = \frac{1}{2} \neq 0 = f^*(0)$.

Dies wiederspricht nicht der Aussage von Satz 2 in Paragraph 9, da g stetig sein müßte um die Gleichheit von f' und f^* überall zu erreichen. Die Funktion g ist aber in 0 nicht stetig (so gilt z.B. $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \overset{n\to\infty}{\to} 0$, aber $g(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \frac{1}{2} \neq 0 = g(0,0)$).

H 24 Differenzierbarkeit (3 Punkte)

Vorbemerkung: Wenn nur $|| \cdot ||$ da steht, ist im Allgemeinen die euklidische Norm $|| \cdot ||_2$ gemeint!

Die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar. Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x) := g(||x||)$ für $x \in \mathbb{R}^n$.

Zeige: f ist genau dann im Nullpunkt differenzierbar, wenn $g'(0) = 0$ gilt. In diesem Fall ist $\operatorname{grad} f$ stetig in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^n$.

Wenn f im Nullpunkt differenzierbar sein soll, dann müssen dort auch die partiellen Ableitungen existieren, d.h.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = (0, 0 \ldots, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0, \ldots, h, \ldots, 0) - f(0, \ldots, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{g(|h|) - g(0)}{h}.$$

Nun gilt aber $\lim_{h \searrow 0} \frac{g(|h|)-g(0)}{h} = g'(0)$ und $\lim_{h \nearrow 0} \frac{g(|h|)-g(0)}{h} = \lim_{h \searrow 0} \frac{g(|h|)-g(0)}{-h} = -g'(0)$. Also existieren die partiellen Ableitungen von f genau dann, wenn $g'(0) = -g'(0)$, d.h. $g'(0) = 0$ gilt.

In diesem Fall sind die Funktionen

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \begin{cases} g'(|x|) \cdot \frac{x_i}{|x|} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

stetig, denn für $x \to 0$ folgt mit der Ungleichung

$$0 < |\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)| = |g'(|x|)| \cdot \frac{|x_i|}{|x|} \leq |g'(x)|$$

und mit $\lim_{x \to 0} |g'(x)| = 0$ daß $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \to 0 = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$. Also sind die partiellen Ableitungen auch stetig im Nullpunkt.