Analysis II für M, HLM, Ph

7. Übung
Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 19 Stetigkeit

Zeige, dass die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} x + y\sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

stetig in $\{(0,0)\}$ ist und es

$$\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x,y)) = 0$$

gilt aber

$$\lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y))$$

existiert nicht.

f ist stetig in $(0,0)$. Denn für jede Folge $\{(x_n,y_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ mit $\lim_{n\to\infty}(x_n,y_n) = (0,0)$ gilt

$$|f(x_n,y_n)| \leq |x_n| + |y_n| \to 0.$$

$\lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y))$ *existiert nicht, da* $\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ *nicht existiert (Analysis I).*

G 20 Zusammenhängende Mengen

Die Abschließung einer zusammenhängenden Menge ist ebenfalls zusammenhängend.

Heuser, Lehrbuch der Analysis, Teil II, s. 238

G 21 Metriken oder nicht?

a) Welche der folgenden Abbildungen von $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ erfüllt die Bedingungen einer Metrik? Welche Eigenschaften einer Metrik sind gegebenenfalls nicht erfüllt?

1. $d(x,y) := |x-y|$
2. $\tilde{d}(x,y) := (x-y)^2$
3. $\hat{d}(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{für } x = y \\ 1 & \text{für } x \neq y \end{cases}$

Die Metrik $\hat{d}$ läßt sich auch auf dem $\mathbb{R}^2$ definieren. Bestimme die offene Einheitskreisscheibe.

b) Zeige, daß für jeden normierten reellen Vektorraum V mit Norm $\|\cdot\|$ die Abbildung $d(x,y) := \|x-y\|$ eine Metrik definiert.

a) Zu überprüfen sind jeweils die drei Eigenschaften

(i) $d(x,y) = 0 \iff x = y$

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$ *für alle* $x,y \in \mathbb{R}$

(iii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ *für alle* $x,y,z \in \mathbb{R}$.

(siehe Forster II, Paragraph 1)

1. Die Funktion d ist eine Metrik:

(i) $|x-y| = 0 \iff x - y = 0 \iff x = y$

(ii) $|x-y| = |(-1)(x-y)| = |y-x|$

(iii) $|x-z| = |x-y+y-z| \leq |x-y| + |y-z|$

2. *Die Funktion $\tilde{d}$ erfüllt (i) und (ii), aber nicht (iii):*

   (i) $(x-y)^2 = 0 \iff x-y=0 \iff x=y$

   (ii) $(x-y)^2 = ((-1)(x-y))^2 = (y-x)^2$

   (iii) $(1-0)^2 \not\leq (1-\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2}-0)^2$, *da* $1 \not\leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

3. *Die Funktion $\hat{d}$ ist eine Metrik:*

   (i) $\hat{d}(x,y) = 0 \iff x = y$ *gilt per Definition*

   (ii) $\hat{d}(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{für } x=y \\ 1 & \text{für } x \neq y \end{array} \right\} = \hat{d}(y,x)$

   (iii) $\hat{d}(x,z) \leq \hat{d}(x,y) + \hat{d}(y,z)$, *da* $\hat{d}(x,z) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{für } x=z \\ 1 & \text{für } x \neq z \end{array} \right.$ *und* $\hat{d}(x,y)+\hat{d}(y,z) =$
   $$\left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{für } x=y=z \\ 1 & \text{für } x \neq y \text{ und } x = z \\ & \text{oder } x=y \text{ und } y \neq z \\ 2 & \text{für } x \neq y \neq z. \end{array} \right.$$

Die offene Einheitskreisscheibe ist $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \hat{d}((x,y),(0,0)) < 1\} = \{(0,0)\}$.

b) *Aus den Norm-Eigenschaften leiten wir die Bedingungen für eine Metrik her (siehe oben):*

(i) $d(x,y) = 0 \iff \|x-y\| = 0 \iff x-y=0 \iff x=y$

(ii) $d(x,y) = \|x-y\| = |-1| \cdot \|y-x\| = \|y-x\|$

(iii) $d(x,z) = \|x-z\| = \|x-y+y-z\| \leq \|x-y\| + \|y-z\| = d(x,y) + d(y,z)$

Hausübung

H 19 Stetigkeit (2 Punkte)

Ist die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

stetig?

f ist nicht stetig in $(0,0)$. Zum Beweis betrachten wir zwei Folgen $\{(x_n,0)\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ und $\{(x_n,x_n^2)\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, die beide gegen $(0,0)$ konvergieren. Wegen $f(x_n,0) = 0$ und $f(x_n,x_n^2) = 1/2$ schliessen wir daraus, dass die beide Grenzwerte existieren, aber verschieden sind, d.h. f hat keinen Grenzwert in $(0,0)$.

H 20 Konvergenz ist abhängig von der Metrik (2 Punkte)

Betrachte die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := \frac{1}{n}$. Bezüglich welcher der beiden Metriken aus G21 ist die Folge konvergent? Erkläre, wie die bezüglich $\hat{d}$ konvergenten Folgen aussehen müssen.

Die Folge $(a_n)_n$ ist konvergent bezüglich d, aber nicht bezüglich $\hat{d}$. Die erste Aussage ist unmittelbar einsichtig, für die zweite bemerken wir, daß für jedes N und jeden vermuteten Grenzwert a ein $n \geq N$ existiert, so daß $\hat{d}(\frac{1}{n},a) = 1$. Damit eine Folge bezüglich der Metrik $\hat{d}$ konvergiert, muß sie also ab einem bestimmten N konstant sein (d.h. also für alle $n,m \geq N$ gilt $a_n = a_m$).

H 21 Topologie von $\mathbb{R}^n$ (5 Punkte)

Versehe $\mathbb{R}$ mit der Metrik

$$d(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}.$$

Gebe ein Beispiel einer Folge von bezüglich dieser Metrik abgeschlossenen beschränkten nichtleeren Mengen $A_k \subset \mathbb{R}$ mit $A_{k+1} \subset A_k$, so dass

$$\cap_{k=1}^{\infty} A_k = \emptyset.$$

Hinweis: Welche Mengen in $\mathbb{R}$ sind beschränkt bezüglich dieser Metrik?

$A_k := [k, \infty)$. *Jede Menge* A_k *ist abgeschlossen und beschränkt bezüglich der Metrik* $d(\cdot,\cdot)$, *aber* $\cap_{k=1}^{\infty} A_k = \emptyset$.