Analysis II für M, HLM, Ph

6. Übung
Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 16 Stetigkeit

Wir betrachten die Funktionen

$$f_1(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R},$$

$$f_2(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}.$$

Sind f_1 und f_2 stetig? Sind f_1, f_2 in $(0,0)$ fortsetzbar?

f_1 ist nicht stetig in $(0,0)$ fortsetzbar. Zum Beweis betrachten wir zwei Folgen $\{(x_n,0)\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ und $\{(x_n,x_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, die beide gegen $(0,0)$ konvergieren. Wegen $f_1(x_n,0) = 1$ und $f_1(x_n,x_n) = 1/2$ schliessen wir daraus, dass die beide Grenzwerte existieren, aber verschieden sind, d.h. f_1 hat keinen Grenzwert in $(0,0)$.

f_2 ist stetig in $(0,0)$ fortsetzbar. Denn für jede Folge $\{(x_n,y_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ mit $\lim_{n\to\infty}(x_n,y_n) = (0,0)$ gilt

$$|f_2(x_n,y_n)| \leq |\frac{x_n^2 y_n}{x_n^2}| \leq |y_n| \to 0.$$

G 17 Raum stetiger Funktionen

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen, so daß $a < b$ gilt. Auf dem Vektorraum $C([a,b],\mathbb{R})$ der stetigen reellwertigen Funktionen auf $[a,b]$ definieren wir eine Abbildung $\|\cdot\|_\infty : C([a,b],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ durch $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \mid x \in [a,b]\}$.

1. Warum existiert das Supremum in obiger Definition?
2. Beweise, dass die Einschränkung $\exp|_{[a,b]}$ nicht in P liegt, wobei P die Menge aller Polynomfunktionen auf $[a,b]$ ist.
3. Ist P abgeschlossen in $C([a,b],\mathbb{R})$?

(a) *Weil stetige Funktionen auf abgeschlossenen beschränkten (=kompakten) Mengen ihr Maximum annehmen. Man hätte hier also auch* max *statt* sup *schreiben dürfen.*

(b) *Da es für jedes Polynom f eine höhere Ableitung $f^{(n)}$ gibt, welche die Nullfunktion ist, aber $\exp' = \exp$ gilt, kann die Exponentialfunktion auf keinem Intervall $[a,b]$ mit $a < b$ mit einem Polynom übereinstimmen.*

(c) *Da $\exp|_{[a,b]}$ ein Grenzwert einer Folge von Polynomfunktionen (nämlich der Partialsummen) ist, welcher nicht in P liegt, kann P nicht abgeschlossen sein.*

G 18 Stetige Abbildungen auf Kompakta

Es sei $f : Q \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine stetige Abbildung. Weiterhin sei $Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i\}$. Zeige, dass f *abgeschlossen* ist, d.h., dass das Bild $f(A)$ jeder abgeschlossenen Menge $A \subset Q$ wieder abgeschlossen ist.

Ist A abgeschlossen, so ist A als abgeschlossenen Teilmenge einer Kompakten Menge wieder kompakt. Folglich ist das Bild $f(A)$ kompakt und somit abgeschlossen.

Hausübung

H 16 Stetigkeit (2 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \frac{\sin(x)y^2}{x^2 + y^4}$$

1. Ist die Funktion f stetig?
2. Ist sie stetig auf $\mathbb{R}^2$ fortsetzbar, d.h. gibt es eine stetige Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $F_{|\mathbb{R}^2\setminus\{0\}} = f$?

1. *Die Funktion f ist als Quotient stetiger Funktionen wieder stetig.*
2. *Es gilt $\lim_{y\to 0} f(0, y) = 0 \neq \frac{1}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\frac{1}{n^2})}{2\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n})$. Somit kann die Funktion f nicht stetig auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt werden.*

H 17 Funktionen auf dem Produkt kompakter Intervalle (3 Punkte)

Seien I und J kompakte Intervalle in $\mathbb{R}$ und $f : I \times J \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Die Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ werde definiert durch

$$F(x) := \sup\{f(x, y) \mid y \in J\} .$$

Zeige, dass F stetig ist.

Sei $\varepsilon > 0$ und $(a, b) \in I \times J$ beliebig. Da f stetig ist, existiert ein $\delta > 0$ so daß für alle $(x, y) \in I \times J$ mit $\|(x, y) - (a, b)\| < \delta$ gilt $|f(x, y) - f(a, b)| < \varepsilon$. Da f stetig und J kompakt ist gilt ausserdem, daß für alle $x \in I$ ein $y_x \in J$ existiert mit $f(x, y_x) = \sup\{f(x, y) \mid y \in J\}$.

Dann folgt daß für alle $x \in I$ mit $|x - a| < \delta$ gilt

$$|F(x) - F(a)| = |\sup\{f(x, y) \mid y \in J\} - \sup\{f(a, y) \mid y \in J\}| = |f(x, y_x) - f(a, y_a)| < \varepsilon.$$

Denn wäre dies nicht der Fall, so könnte man einen Widerspruch konstruieren: Angenommen, $|f(x, y_x) - f(a, y_a)| \geq \varepsilon$ für ein $x \in I$ mit $|x - a| < \delta$.

Fall I: *Wenn $f(x, y_x) - f(a, y_a) \geq \varepsilon$ gilt, dann gilt $f(x, y_x) \geq f(a, y_a) + \varepsilon$. Da $\|(y, y_x) - (a, y_x)\| = |x - a|$, gilt wegen der Stetigkeit von f auch $|f(x, y_x) - f(a, y_x)| < \varepsilon$ und somit $f(a, y_x) > f(a, y_a)$, was ein Widerspruch zur Konstruktion von y_a ist.*

Fall II: *Wenn $-(f(x, y_x) - f(a, y_a)) \geq \varepsilon$ gilt, dann gilt $f(a, y_a) \geq f(x, y_x) + \varepsilon$. Da $\|(y, y_a) - (a, y_a)\| = |x - a|$, gilt wegen der Stetigkeit von f auch $|f(x, y_x) - f(a, y_x)| < \varepsilon$ und somit $f(x, y_a) > f(x, y_x)$, was ein Widerspruch zur Konstruktion von y_x ist.*

Also ist F stetig für jedes $a \in I$.

H 18 Jordan-Nullmengen (4 Punkte)

Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Jordan-Nullmenge*, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ eine endliche Überdeckung $\{Q_i\}_{i=1}^n$ von M durch offene (oder abgeschlossene) Intervalle Q_i[1] gibt, so dass

$$\sum_{i=1}^{n} |Q_i| < \epsilon.$$

[1] $Q_i := \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i < x < b_i\}$, $|Q_i| := \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$.

Zeige: Wenn M eine beschränkte Menge ist, deren Abschluss nur endlich viele Häufungspunkte $x_1, \dots, x_n$ hat und zwar so, daß für jedes $\varepsilon > 0$ nur endlich Punkte von M nicht in $\bigcup_{k=1}^n B_\varepsilon(x_k)$ liegen, dann ist M eine Jordan-Nullmenge.

Es seien $x_1, \dots, x_n$ die Häufungspunkte der Menge $M \subseteq \mathbb{R}^m$. Ferner sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann überdecken wir $x_1, \dots, x_n$ mit Würfeln $R_1, \dots R_n$ mit Mittelpunkten $x_1, \dots, x_n$ und Kantenlänge $\sqrt[m]{\frac{\varepsilon}{2n}}$. Nun gilt daß x_j, $j = 1 \dots, n$ im Inneren von R_j liegt. Voraussetzungsgemäß liegen nur endlich viele $X_{n+1}, \dots, x_{n+L} \in M$ außerhalb von $\bigcup_{j=1}^n R_j$. Wir überdecken nun $x_{n+1}, \dots, x_{n+L}$ mit Würfeln $R_{n+1}, \dots, R_{n+L}$ mit Kantenlänge $\sqrt[m]{\frac{\varepsilon}{2L}}$. Dann gilt

$$M \subseteq \bigcup_{j=1}^{n+L} R_j, \qquad \sum_{j=1}^{n+L} |R_j| = n \cdot \frac{\varepsilon}{2n} + L \cdot \frac{\varepsilon}{2L} = \varepsilon.$$