Analysis II für M, HLM, Ph

5. Übung
Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 13 Norm und Topologie

a) Zeige, daß für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$. Folgere daraus, daß $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen ist bezüglich $\| \ \|_2$ genau dann, wenn U offen ist bezüglich $\| \ \|_\infty$.

b) Da alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind, kann jede Norm durch $k \cdot \| \ \|_1$ beschränkt werden für ein geeignetes $k \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$. Bestimme ein solches k.

Hinweis: Verwende die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$.

a) *Zum einen gilt*

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} \leq \sqrt{n \cdot \max\{|x_k|^2 \mid k = 1, \dots n\}} = \sqrt{n} \cdot \|x\|_\infty.$$

Auf der anderen Seite gilt

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} \geq \sqrt{\max\{|x_k|^2 \mid k = 1, \dots n\}} = \|x\|_\infty.$$

Also folgt $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \cdot \|x\|_\infty$. *Für die Äquivalenz gilt*

$\Rightarrow$ *Wenn* U *offen ist bezüglich* $\| \ \|_2$, *dann gibt es für jedes* $x \in U$ *ein* $\varepsilon > 0$ *so daß* $U_2(x, \varepsilon) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x\|_2 < \varepsilon\} \subseteq U$. $U_\infty(x, \varepsilon) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x\|_\infty < \varepsilon\} \subseteq \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x\|_2 < \varepsilon\} = U_2(x, \varepsilon) \subseteq U$. *Also ist* U *auch offen bezüglich* $\| \ \|_\infty$.

$\Leftarrow$ *Wenn* U *offen ist bezüglich* $\| \ \|_\infty$, *dann gibt es für jedes* $x \in U$ *ein* $\varepsilon > 0$ *so daß* $U_\infty(x, \varepsilon) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x\|_\infty < \varepsilon\} \subseteq U$. $U_2(x, \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x\|_2 < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\} \subseteq \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x\|_\infty < \varepsilon\} = U_\infty(x, \varepsilon) \subseteq U$. *Also ist* U *auch offen bezüglich* $\| \ \|_2$.

b) *Sei* $\| \ \|$ *eine Norm auf* $\mathbb{R}^n$, *sei* $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *und sei* $e_1, \dots, e_n$ *die Standardbasis auf* $\mathbb{R}^n$. *Dann gilt* $\|x\| = \|\sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot \|e_i\| = (\max\{\|e_1\|, \dots, \|e_n\|\}) \cdot \sum_{i=1}^n |x_i| = k \cdot \|x\|_1$ *mit* $k := \max\{\|e_1\|, \dots, \|e_n\|\}$.

G 14 Rand, Abschluss, Innneres

Wir betrachten $\mathbb{R}^n$. Das *innere* $\mathring{A}$ einer Menge A ist die Menge aller Punkte $p \in A$ für die es eine offene ϵ-Kugel $U_\epsilon(p)$ gibt, welche ganz in O liegt (d.h. $\mathring{A}$ ist die Vereinigung aller offenen Teilmengen von A). Der *Rand* ∂A von A ist die Menge $\overline{A} \setminus \mathring{A}$.

1. Skizziere für die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ jeweils das Innere $\mathring{A}$, den Abschluss $\overline{A}$ sowie den Rand ∂A:
   (a) $A = U_1(0)$
   (b) $A = (-1, 2] \times [1, 3)$
   (c) $A = \{(x, 0) \mid x \neq 0\}$
   (d) $A = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{Q}\}$
   (e) $A = \mathbb{Q}^2$

2. Beweise die folgenden Inklusionen:
   (a) $\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}$
   (b) $\mathring{A} \cap \partial A = \emptyset$
   (c) $A \cup \partial A = \overline{A}$

1. (a) $\mathring{A} = U_1(0)$,$\overline{A} = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$,$\partial A = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$.
(b) $\mathring{A} = (-1,2) \times (1,3)$,$\overline{A} = [-1,2] \times [1,3]$,$\partial A = [-1,2] \times \{1\} \cup [-1,2] \times \{3\} \cup \{-1\} \times [1,3] \cup \{2\} \times [1,3]$
(c) $\mathring{A} = \emptyset$,$\overline{A} = \mathbb{R} \times \{0\}$, $\partial A = \mathbb{R} \times \{0\}$
(d) $\mathring{A} = \emptyset$,$\overline{A} = \mathbb{R} \times \{0\}$, $\partial A = \mathbb{R} \times \{0\}$
(e) $\mathring{A} = \emptyset$,$\overline{A} = \mathbb{R}^2$, $\partial A = \mathbb{R}^2$

2. (a) Die Inklusionen $\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}$ *folgen aus den Definitionen.*
(b) $\mathring{A} \cap \partial A = \mathring{A} \cap (\overline{A} \setminus \mathring{A}) = \mathring{A} \cap (\overline{A} \cap \mathcal{C}\mathring{A}) = \emptyset$
(c) $A \cup \partial A = A \cup \overline{A} \setminus \mathring{A} = (\overline{A} \setminus \mathring{A}) \cup A = \overline{A}$, *da* $\mathring{A} \subset A$.

G 15 Integrierbarkeit

Gebe ein Beispiel von zwei Riemann-integrierbaren Funktionen f und g derart, dass $f \circ g$ nicht Riemann-integrierbar ist.

$$f(y) = \begin{cases} 0, & y = 0 \\ 1, & y \in (0,1] \end{cases}; \quad g(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \\ 1/q, & x = p/q \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \ (p, q \in \mathbb{N} \text{ ohne gemeinsame Teiler}) \end{cases}.$$

Dann liegen f *und* g *in* $\mathcal{R}([0,1])$, *das Kompositum* $f \circ g$ *ist jedoch nicht mehr auf* $[0,1]$ *integrierbar.*

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \\ 1, & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Hausübung

H 13 Minkowskische Ungleichung (2 Punkte)

Zeige:

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} \big(a_k + b_k\big)^2\Big)^{1/2} \leq \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\Big)^{1/2} + \Big(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\Big)^{1/2}.$$

Hinweis: Verwende die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung.

$$\sum (a_k + b_k)^2 = \sum (a_k + b_k) a_k + \sum (a_k + b_k) b_k \leq \sum |a_k + b_k| \, |a_k| + \sum |a_k + b_k| \, |b_k|,$$

und dies ist nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\leq \Big(\sum \big(a_k + b_k\big)^2\Big)^{1/2} \Big[\Big(\sum a_k^2\Big)^{1/2} + \Big(\sum b_k^2\Big)^{1/2}\Big].$$

H 14 Französische Eisenbahnmetrik (3 Punkte)

Definition: Sei X eine beliebige Menge. Eine Abbildung $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ heißt *Metrik*, wenn für beliebige Elemente x, y und z von X die folgenden axiomatischen Bedingungen erfüllt sind:

1. $d\,(x,x) = 0$ (identische Punkte haben Abstand 0),
2. $d\,(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$ (nichtidentische Punkte haben nicht Abstand 0),
3. $d\,(x,y) = d(y,x)$ (Symmetrie),
4. $d\,(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (Dreiecksungleichung).

Aufgabe: Betrachte $\mathbb{R}^2$ zusammen mit folgender, oft als *französische Eisenbahnmetrik*, bezeichneten Metrik

$$d_{SNCF}\,(x,\ y) := \begin{cases} |x-y| & \text{falls } x = \lambda y \text{ für ein } \lambda > 0 \\ |x| + |y| & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Zeige, dass d_{SNCF} tatsächlich eine Metrik ist.
- Erkläre die Namensgebung? Wo liegt Paris?
- Skizziere $U_R\,(x)$ für $x \neq 0$. Welche beiden Fälle sind dabei zu unterscheiden?

a)
- Positivität: $|x-y| \geq 0$, $|x| + |y| \geq 0$ *und* $|x| + |y| = 0$ *oder* $|x-y| = 0 \Leftrightarrow x = y$
- Symmetrie: $d(x,y) = |x-y| = |y-x| = d(y,x)$ *falls* $x = \lambda y$ *(daher* $y = \frac{1}{\lambda}x$*) und* $d(x,y) = |x| + |y| = |y| + |x| = d(y,x)$ *sonst.*
- Dreiecksungleichung: *Man muss vier Fälle unterscheiden:*
  1.Fall: $x = \lambda y = \mu z$ *in diesem Fall ist die Metrik gerade die Euklidsche Norm, also gilt die Dreiecksungleichung.*
  2.Fall: $x = \lambda y,\ z \neq \mu y\ \forall \mu$

$$\begin{aligned} d(x,y) &= |x| + |z| = \lambda|y| + |z| \\ &\leq (|\lambda - 1| + |1|)|y| + |z| \\ &= |x-y| + |y| + |z| \\ &= d(x,y) + d(y,z) \end{aligned}$$

  Der Fall $z = \lambda y,\ x \neq \mu y\ \forall \mu$ *folgt analog.*
  3.Fall: $x = \lambda z,\ y \neq \mu z\ \forall \mu$

$$\begin{aligned} d(x,y) &= |x-z| = |1-\lambda||x| \\ &\leq \lambda|x| + |x| \\ &\leq |z| + |x| + 2|y| \\ &= d(x,y) + d(y,z) \end{aligned}$$

  4.Fall: x, y, z *paarweise linear unabhägig*

$$\begin{aligned} d(x,z) &= |x| + |z| \\ &\leq |x| + |y| + |y| + |z| \\ &= d(x,y) + d(y,z) \end{aligned}$$

b) Paris liegt im Ursprung. Der Name beruht auf der starken Zentralisierung des französischen Bahnsystems, die es oft notwendigmacht über Paris zu reisen.

c) Für $d(x,0) > R$*, ein Geradenstück der Länge* $2R$*, für* $d(x,0) \leq R$ *kommt noch eine offene Kreisscheibe des Radius* $r = R - d(x,o)$ *dazu.*

H 15 Kompaktheit im $\mathbb{R}^n$ (4 Punkte)

Zeige: Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Folgengliedern $a_n \in A$ eine in A konvergente Teilfolge besitzt.

Zu zeigen: $A \subset \mathbb{R}^n$ ist kompakt $\iff$ jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Folgengliedern $a_n \in A$ besitzt eine in A konvergente Teilfolge.

$\Rightarrow$ ist nach dem Satz von Bolzano-Weiertraß klar.

$\Leftarrow$ Wir zeigen zunächst, daß A abgeschlossen ist. Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in A, die gegen $x \in \mathbb{R}^n$ konvergiere. Dann konvergiert jede Teilfolge von $(a_k)_k$ ebenfalls gegen x. Also ist $x \in A$. Damit ist A abgschlossen. Die Menge A ist aber auch beschränkt: Denn angenommen, dies sei nicht der Fall. Dann gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $a_n \in A$ mit $\|a_n\| > n$. Diese Folge hat keine konvergente Teilfolge, da die beschränkt sein müsste. Also ist A beschränkt. Damit ist A nach dem Satz von Heine-Borel kompakt.