Analysis II für M, HLM, Ph

4. Übung
Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 10 Stetigkeit/Integrierbarkeit

a) Ist die Funktion $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ auf dem Intervall $[-1, 1]$ integrierbar?

b) Ist die Funktion

$$g(x) = \begin{cases} x|x| + (x-1)|x-1| & \text{falls} \quad x \leq 5 \\ 0 & \text{falls} \quad x > 5 \end{cases}$$

auf dem Intervall $[-5, 10]$ integrierbar?

c) Ist die Funktion $h(x) = |2f(x)(g(x))^2 - 4g(x)| + \pi$ auf dem Intervall $[-1, 1]$ integrierbar?

Hinweis: Hier ist nicht viel zu rechnen!

a) f ist stetig, also integrierbar.

b) g ist stückweise stetig, also integrierbar.

c) h ist stetig, also integrierbar.

G 11 Substitutionsregel

Verwenden Sie die Substitutionsregel, um die folgenden Integrale zu berechnen.

a) $\displaystyle\int_1^4 e^{\sqrt{x}}\,dx$,

b) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx$.

a) Mit der Substitution $t = \sqrt{x}$ und anschließender partieller Integration folgt

$$\int_1^4 e^{\sqrt{x}}\,dx = \int_1^2 2te^t\,dt = 2te^t - 2\int_1^2 e^t\,dt = 2e^2.$$

b) Anwendung der Substitution $t = x^2 + 2x + 2$ ergibt

$$\int_0^2 \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+2}}\,dx = \int_2^{10} \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \left[\sqrt{t}\right]_2^{10} = \sqrt{10} - \sqrt{2}.$$

G 12 Partielle Integration

Berechnen Sie die folgenden Integrale durch partielle Integration.

a) $\int x\sin(x)\,dx$,

b) $\int_0^{\frac{1}{2}} \cosh^2(x)\,dx$,

c) $\int \arctan(x)\,dx$.

a) *Partielle Integration mit* $u(x) = x$ *und* $v(x) = \sin(x)$ *ergibt*

$$\int x\sin(x)\,dx = -x\cos(x) - \int \cos(x)\,dx = \sin(x) - x\cos(x) + c.$$

b) *Es gilt*

$$\begin{aligned}\int_0^{1/2} \cosh^2(x)\,dx &= \int_0^{1/2} \cosh(x)\cosh(x)\,dx\\ &= [\sinh(x)\cosh(x)]_0^{1/2} - \int_0^{1/2} \sinh^2(x)\,dx\\ &= \sinh(1/2)\cosh(1/2) + \int_0^{1/2} 1 - \cosh^2(x)\,dx\\ &= 1/2 + \sinh(1/2)\cosh(1/2) - \int_0^{1/2} \cosh^2(x)\,dx,\end{aligned}$$

somit folgt

$$\int_0^{1/2} \cosh^2(x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\sinh(1/2)\cosh(1/2) + \frac{1}{2}\right).$$

c) *Wählt man* $u(x) = \arctan(x)$ *und* $v(x) = 1$, *so erhält man*

$$\int \arctan(x)\,dx = x\arctan(x) - \int x\frac{1}{1+x^2}\,dx = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + c.$$

Hausübung

H 10 Integration I (3 Punkte)

a) Skizzieren Sie die Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. Wie groß ist die Fläche, die von dem Graphen der Funktion und der x-Achse eingeschlossen wird?

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Substitution $x = \sin(t)$ das Integral

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx.$$

a) *Der gesuchte Flächeninhalt ist* $\pi/2$, *da es sich um einen Halbkreis mit Radius* 1 *handelt. In b) wird das durch Integration bewiesen.*

b) *Die Substitution* $x = \sin(t)$ *ergibt*

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2(t)} \cdot \cos(t)dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(t)dt.$$

Mit partieller Integration erhält man

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(t)dt = [\sin(x)\cos(x)]_{-\pi/2}^{+\pi/2} + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2(t)dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 - \cos^2(t)dt.$$

Daraus folgt

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(t)dt = \frac{\pi}{2}$$

H 11 Integration II (3 Punkte)

Bestimmen Sie die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(x)\cos(x)\,dx$,

b) $\displaystyle\int e^{\sin(x)}\cos(x)\,dx$,

c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2+1}{x^3+3x+1}\,dx$,

d) $\displaystyle\int x^2\sin(x)\,dx$.

a) *Mit partieller Integration erhält man*

$$\int_0^{\pi} \sin(x)\cos(x)\,dx = [\sin(x)\sin(x)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos(x)\sin(x)\,dx$$

und damit

$$\int_0^{\pi} \sin(x)\cos(x)\,dx = 0.$$

b) *Anwendung der Substitution* $t = \sin(x)$ *ergibt*

$$\int e^{\sin(x)}\cos(x)\,dx = \int e^t\,dt = e^t + c = e^{\sin(x)} + c.$$

c) *Da* $(x^3+3x+1)' = 3x^2+3$ *gilt, erhält man*

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{x^2+1}{x^3+3x+1}\,dx &= \frac{1}{3}\int_1^2 \frac{3x^2+3}{x^3+3x+1}\,dx = \left[\frac{1}{3}\ln|3x^3+3x+1|\right]_1^2 \\ &= \frac{1}{3}\left(\ln(31)-\ln(7)\right).\end{aligned}$$

d) *Zweimalige partielle Integration führt zu*

$$\begin{aligned}\int x^2\sin(x)\,dx &= -x^2\cos(x) + 2\int x\cos(x)\,dx \\ &= -x^2\cos(x) + \sin(x) - \int \sin(x)\,dx \\ &= -x^2\cos(x) + 2x\sin(x) - 2\cos(x) + c.\end{aligned}$$

H 12 Partialbruchzerlegung (3 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $D(f) = \mathbb{R}\setminus\{1,2\}$ durch

$$f(x) = \frac{x}{(x-1)(x-2)^2}.$$

Bestimmen Sie Koeffizienten A, B, $C \in \mathbb{R}$ so, daß gilt

$$f(x) = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x-2)^2}. \qquad (*)$$

Benutzen Sie nun die Darstellung aus $(*)$, um das Integral

$$\int_{-1}^0 f(x)dx$$

zu berechnen.

Anmerkung: Die Methode, welche zur Darstellung $(*)$ führt, heißt *Partialbruchzerlegung.*

Es soll gelten

$$\tfrac{x}{(x-1)(x-2)^2} = \tfrac{A}{(x-1)} + \tfrac{B}{(x-2)} + \tfrac{C}{(x-2)^2}.$$

Multiplikation mit $(x-1)(x-2)^2$ *ergibt*

$$x = A(x-2)^2 + B(x-1)(x-2) + C(x-1)$$

und man erhält durch Koeffizientenvergleich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 0 &= A + B \\ 1 &= -4A - 3B + C \\ 0 &= 4A + 2B - C \end{aligned}$$

mit den Lösungen $A = 1$, $B = -1$ *und* $C = 2$. *Das heißt*

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{0} f(x)dx = \int_{-1}^{0} \tfrac{x}{(x-1)(x-2)^2} &= \int_{-1}^{0} \tfrac{1}{x-1}dx + \int_{-1}^{0} \tfrac{-1}{x-2}dx + \int_{-1}^{0} \tfrac{2}{(x-2)^2}dx \\ &= \ln|x-1|\Big|_{-1}^{0} - \ln|x-2|\Big|_{-1}^{0} - 2\tfrac{1}{x-2}\Big|_{-1}^{0} \\ &= -2\ln 2 + \ln 3 + \tfrac{1}{3}. \end{aligned}$$