Analysis II für M, HLM, Ph

3. Übung
Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 7 Trigonometrische Funktionen

Zeige, dass
$$\arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in \mathbb{R},$$
gilt.

Sei $\alpha = \arctan x$. Dann
$$\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

G 8 Riemann-Integral

Berechne für $0 < a < b$ und $k \in \mathbb{N}$ das Integral
$$\int_a^b x^k dx,$$
indem Du den Grenzwert von Riemann-Summen bestimmst.

Hinweis: Benutze als Partition $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ mit $x_j = a(\sqrt[n]{\frac{b}{a}})^j$.

Da die Funktion $x \mapsto x^k$ wiederum stetig auf dem kompakten Intervall $[a,b]$ ist, reicht es eine bestimmte Partition zu betrachten. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ konstruieren wir die folgende Partition von $[a,b]$: Setze $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ mit $x_j := a \cdot q_n^j$, wobei $q_n = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$. Dann gilt $|x_{j+1} - x_j| = |aq_n^{j+1} - aq_n^j| = |aq_n^j(q_n - 1)| \leq b(q_n - 1)$. Die Folge (q_n) konvergiert gegen 1. Daher geht der maximale Partitionsabstand gegen 0. Nun berechnen wir die Riemann-Summen:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} f(x_j)(x_j - x_{j-1}) &= \sum_{j=1}^{n}(aq_n^j)^k(aq_n^j - aq_n^{j-1}) \\
&= a^{k+1}\sum_{j=1}^{n} q_n^{j(k+1)}(1 - \frac{1}{q_n}) \\
&= a^{k+1}q_n^{k+1}\sum_{j=0}^{n-1} q_n^{j(k+1)}(1 - \frac{1}{q_n}) \\
&= a^{k+1}q_n^{k+1}\frac{1 - q_n^{n(k+1)}}{1 - q_n^{k+1}}(1 - \frac{1}{q_n}) \\
&= -\frac{q_n^k(1-q_n)}{1 - q_n^{k+1}}(a^{k+1} - b^{k+1}) \\
&= q_n^k\left(\sum_{j=0}^{k} q_n^j\right)^{-1}(b^{k+1} - a^{k+1}) \\
&\xrightarrow{n\to\infty} \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}.
\end{aligned}$$

G 9 Riemann-Integral

Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige, dass $f \in \mathcal{R}([0,1])$ und $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Sei $\epsilon > 0$ beliebig gegeben. Dann existiert $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $1/n < \epsilon/2$ für alle $n > n_0$. Wählen wir eine Partition P von $[0,1]$ so aus:

$$0 = x_0 < x_1 = \frac{1}{n_0+1} < x_2 < ... < x_k = 1,$$

wobei $x_i - x_{i-1} < \epsilon/(4n_0)$ für $i = 2, 3, ..., k$. Dann

$$U(P,f) - L(P,f) = U(P,f) < \frac{\epsilon}{2} + 2n_0 \frac{\epsilon}{4n_0} = \epsilon.$$

Hausübung

H 7 Integration (3 Punkte)

Welche der folgenden Funktionen sind auf dem Intervall $[0,1]$ integrierbar?

a) $f_1(x) = \exp(-x^2)$,

b) $f_2(x) = x$, für $x \leq 1/2$, $f_2(x) = x^2$ für $x > 1/2$,

c) $f_3(x) = 0$ für $x = 0$, $f_3(x) = 1/x$ für $x > 0$.

a) Die Funktion f_1 ist stetig als Verknüpfung stetiger Funktionen auf ganz $\mathbb{R}$, also integrierbar auf $[0,1]$.

b) Die Funktion f_2 ist stückweise stetig, also integrierbar.

c) Die Funktion f_3 ist nicht integrierbar. Zum Beweis zeigen wir, dass $\int_0^1 f_3\,dx$ eine divergente Untersumme besitzt. Dazu wählen wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ die äquidistante Zerlegung $\left\{\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \ldots, \frac{3}{2^n}, \ldots, \frac{2^n-1}{2^n}\right\}$ von $[0,1]$ und berechnen die assoziierten Untersummen:

$$\sum_{k=1}^{2^n} \left(\frac{k}{2^n} - \frac{k-1}{2^n}\right) \frac{1}{\frac{k}{2^n}} = \sum_{k=1}^{2^n} \left(1 - \frac{k-1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \to \infty$$

für $n \to \infty$, da es sich um die harmonische Reihe handelt.

H 8 Substitutionsregel (3 Punkte)

Berechne die folgenden Integrale mit Hilfe der Substitutionsregel:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx, \quad \int \frac{e^{2x}-2}{2e^{-x}+1}\,dx \quad \text{und} \quad \int \frac{1}{1+\sin x}\,dx.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx &= -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx \overset{\cos' = -\sin}{=} -[\ln|\cos x|]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\ln\frac{1}{\sqrt{2}} + \ln 1 \\ &= \frac{\ln 2}{2}. \end{aligned}$$

Mit der Substitution $x = \ln x$ gilt

$$\begin{aligned}
\int \frac{e^{2x}-2}{2e^{-x}+1}\,dx &= \int \frac{t^2-2}{\frac{2}{t}+1}\cdot\frac{1}{t}\,dt = \int \frac{t^2-2}{2+t}\,dt = \int \frac{t^2-4+2}{t+2}\,dt \\
&= \int t-2+\frac{2}{t+2}\,dt = \frac{t^2}{2} - 2t + 2\ln|t+2| + c \\
&= \frac{e^{2x}}{2} - 2e^x + 2\ln(e^x+2) + c.
\end{aligned}$$

Ist $x = 2\arctan t$, dann gilt $\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$ sowie $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$. Mit Hilfe dieser Substitution erhält man dann

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+\sin x}\,dx &= \int \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{1}{\frac{(1+t)^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{2}{(1+t)^2}\,dt \\
&= -\frac{2}{1+t} + c = -\frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}} + c.
\end{aligned}$$

H 9 Gleichmäßige Konvergenz und Intergration (3 Punkte)

Gegeben sei die Funktionenfolge

$$f_n = \frac{2x}{n}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{n}}, \quad x \in [0,1].$$

1. Untersuche $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.
2. Bestimme
$$I_1 = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad I_2 = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$
und vergleiche die Ergebnisse.

1. (f_n) konvergiert auf $[0,1]$ gleichmäßig gegen die Nullfunktion, denn

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left[\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)|\right] &= \lim_{n\to\infty}\left[\sup_{x\in[0,1]}\left|\frac{2x}{n}e^{\frac{x^2}{n}}\right|\right] \le \lim_{n\to\infty}\left[\sup_{x\in[0,1]}\frac{2\cdot 1}{n}e^{\frac{1}{n}}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt[n]{e}}{n} = 0.
\end{aligned}$$

Damit konvergiert die Funktionenfolge insbesondere auch punktweise.

2.

$$\begin{aligned}
I_1 &= \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{2x}{n}e^{\frac{x^2}{n}}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{x^2}{n}}\Big|_0^1 \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(e^{\frac{1}{n}} - e^0\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{e}-1\right) = 0 \\
I_2 &= \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 0 \quad \mathrm{d}x = 0.
\end{aligned}$$

Also gilt $I_1 = I_2$.