Analysis II für M, HLM, Ph

2. Übung
Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 4 Punktweise und Gleichmäßige Konvergenz

Untersuche $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ und $\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$ auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz, wobei

$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}, \quad x \in \mathbb{R}; \quad f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}, \quad x \in [-1,1].$$

(a) Da $|f_n(x)| \leq 1/\sqrt{n}$ gilt, die Funktionenfolge gleichmäßig auf $\mathbb{R}$ konvergiert.

$$f_n'(x) = \sqrt{n}\cos{(nx)}.$$

Deswegen $\lim_{n\to\infty} f_n'(0) = \lim_{n\to\infty}\sqrt{n} = \infty$. Für $x \neq 0$ existiert der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} f_n'(x)$ nicht. Um das zu zeigen, nehmen wir an, dass $\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = l$ erfüllt ist. Dann für n groß genug würde die Ungleichung

$$|\cos{(nx)}| < 1/2$$

gelten. Aber dann $|\cos{(2nx)}| = 1 - 2\cos^2{(nx)} > 1/2$, was ein Widerspruch zur Vermutung ist. Also konvergiert die Funktionenfolge $\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$ punktweise nicht.
(b) Da $|f_n(x)| \leq 1/2n$ gilt

$$\left(\frac{x}{1+n^2x^2} = \frac{1}{2n}\frac{2nx}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{2n}\right),$$

die Funktionenfolge gleichmäßig auf $[-1,1]$ konvergiert.

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2} = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0. \end{cases}$$

Da die Grenzfunktion nicht stetig ist, kann die Konvergenz nicht gleichmäßsein.

G 5 Konvergenzradien

Bestimme den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$:

$$1. \ \sum_{n=0}^{\infty} a^{n^2}x^n \qquad 2. \ \sum_{n=0}^{\infty}(an^2+1)x^n.$$

1. *Es gilt*

$$\limsup_{n\to\infty}\left(a^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} \infty & \text{falls } |a| > 1 \\ 1 & \text{falls } |a| = 1 \\ 0 & \text{falls } |a| < 1. \end{cases}$$

Damit gilt für den Konvergenzradius

$$r = \begin{cases} 0 & \text{falls } |a| > 1 \\ 1 & \text{falls } |a| = 1 \\ \infty & \text{falls } |a| < 1. \end{cases}$$

2. *Es gilt*

$$(an^2+1)^{\frac{1}{n}} = \exp\frac{\log(an^2+1)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \exp(0) = 1,$$

da

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(a\frac{1}{x^2}+1)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\frac{a}{x^2}+1}\cdot(-\frac{2a}{x^3})}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{2a}{\frac{a}{x}+x} = 0$$

nach der Regel von de l'Hospital. Also ist der Konvergenzradius $r = 1$ unabhängig von a.

G 6 Potenzreihen und Differentiation

Gegeben sei die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{2n}}\,x^n.$$

(a) Ermitteln Sie den Konvergenzradius ρ und geben Sie für $x \in (-\rho, \rho)$ die Summe $f(x)$ der Potenzreihe an.

(b) Bestimmen Sie jeweils eine Potenzreihe für die Ableitungen $f'(x)$ und $f''(x)$, wobei $|x| < \rho$.

(a) Gegeben ist die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{2n}}\,x^n.$$

Mit

$$a_n := \frac{(-1)^n}{4^{2n}}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ folgt

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{4^{2n}}\right|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{16}\right)^n} = \frac{1}{16},$$

womit sich mit dem Satz 1.16 der Konvergenzradius

$$\rho = 16$$

ergibt.

Ist nun $x \in (-16, 16)$ beliebig gewählt, dann gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{2n}}\,x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{16}\right)^n = \frac{1}{1-\left(-\frac{x}{16}\right)} = \frac{16}{16+x}$$

($\rightarrow$ geometrische Reihe) und somit ist

$$f(x) = \frac{16}{16+x}$$

die Summe der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{2n}}\,x^n.$$

(b) *Es sei erneut ein $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 16$ gewählt. Nach Satz 1.21 auf S.18 a.a.O. folgt*

$$f'(x) = \frac{-16}{(16+x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n\,\frac{(-1)^n}{4^{2n}}\,x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\,\frac{(-1)^{n+1}}{16^{n+1}}\,x^n.$$

Mit dem Satz 1.21 folgt zudem

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\frac{(-1)^n}{4^{2n}}\,x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)\frac{(-1)^n}{16^{n+2}}\,x^n.$$

Hausübung

H 4 Potenzreihen und Differentiation (3 Punkte)

Bestimme den Konvergenzradius und für alle x im Konvergenzbereich den Wert der Potenzreihe

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^k.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^k &= x^2 \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^{k-2} = x^2 \sum_{k=2}^{\infty} \left(x^k\right)'' \\
&= x^2 \left(\sum_{k=2}^{\infty} x^k\right)'' \qquad \textit{für alle} \quad |x| < 1 \quad \textit{nach Satz 1.21} \\
&= x^2 \left(\frac{1}{1-x} - 1 - x\right)'' = x^2 \left(\frac{1}{(1-x)^2} - 1\right)' = x^2 \frac{2}{(1-x)^3}
\end{aligned}$$

Also hat die Potenzreihe Konvergenzradius 1 *nach Satz 1.21 und es gilt*

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^k = \frac{2x^2}{(1-x)^3}.$$

H 5 Konvergenz von Potenzreihen (3 Punkte)

Bestimme für die folgenden Potenzreihen jeweils alle $x \in \mathbb{R}$, für die sie konvergieren: (Nicht die Randpunkte vergessen!)

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} n!x^n \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}(x-2)^n \qquad \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^{3n}$$

Hinweis zu (c): Betrachte für die Randpunkte die Folge $\ln[(1-1/n)^{n^2} e^n]$

1. *Konvergenzradius mit Quotientenkriterium:*

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Also ist der Konvergenzradius 0 *und die Potenzreihe konvergiert nur für* $x = 0$.

2. *Konvergenzradius mit Wurzelkriterium:*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n2^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{2},$$

also ist der Konvergenzradius 2, die Reihe konvergiert also auf jeden Fall für alle $x \in (0,4)$ *und divergiert für alle* $x \in \mathbb{R}\backslash[0,4]$.
Untersuchung der Randpunkte:
$x = 0:\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}(0-2)^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ *ist konvergent (alternierende harmonische Reihe)*
$x = 4:\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}(4-2)^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *ist divergent (harmonische Reihe),*
also konvergiert die Reihe für alle $x \in [0,4)$.

3. *Konvergenzradius mit Wurzelkriterium:*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}\right|} = \lim_{n\to\infty} \left|1-\frac{1}{n}\right|^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$$

Also hat die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n$ *den Konvergenzradius* e, *konvergiert also für alle* $z \in (-e,e)$ *und divergiert für alle* $z \in \mathbb{R}\backslash[-e,e]$. *Mit* $z = x^3$ *konvergiert die ursprüngliche Reihe also für alle* $x \in (-\sqrt[3]{e}, \sqrt[3]{e})$ *und divergiert für alle* $x \in \mathbb{R}\backslash[-\sqrt[3]{e}, \sqrt[3]{e}]$.
Untersuchung der Randpunkte:
Wir müssen die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2} e^n \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}(-e)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2} e^n$$

auf Konvergenz untersuchen. Wir zeigen, dass die summierten Folgen jeweils keine Nullfolgen sind, indem wir $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2} e^n$ *bestimmen:*
Nach dem Hinweis bestimmen wir zuerst

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \ln\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2} e^n\right] &= \lim_{n\to\infty}\left(\ln\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}\right) + \ln(e^n)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(n^2\cdot\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)+n\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} n^2\left(\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}\right) \\
&= \lim_{t\searrow 0}\frac{\ln(1-t)+t}{t^2} \qquad \left(\textit{mit} \quad t = \frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

Da $\lim\limits_{t\searrow 0}(\ln(1-t)+t) = \ln(1) = 0$ *und* $\lim\limits_{t\searrow 0} t^2 = 0$ *ist, gilt mit l'Hospital:*

$$\lim_{t\searrow 0}\frac{\ln(1-t)+t}{t^2} = \lim_{t\searrow 0}\frac{-\frac{1}{1-t}+1}{2t}.$$

Wieder ist $\lim\limits_{t\searrow 0}\left(-\frac{1}{1-t}+1\right) = -1+1 = 0$ *und* $\lim\limits_{t\searrow 0} 2t = 0$. *Also ist wieder mit l'Hospital:*

$$\lim_{t\searrow 0}\frac{-\frac{1}{1-t}+1}{2t} = \lim_{t\searrow 0}\frac{-\frac{1}{(1-t)^2}}{2} = \lim_{t\searrow 0} -\frac{1}{2(1-t)^2} = -\frac{1}{2}.$$

Damit ist $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2} e^n = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \neq 0$.
Daraus folgt schließlich, dass die Reihen für $x = -\sqrt[3]{e}$ *und* $x = \sqrt[3]{e}$ *nicht konvergieren, es bleibt also beim Konvergenzintervall* $(-\sqrt[3]{e}, \sqrt[3]{e})$.

H 6 Gegenbeispiele zum Satz von Dini (3 Punkte)

Der Satz von Dini benötigt die drei folgenden Voraussetzungen:

- Das Intervall I ist kompakt.
- $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ für alle $x \in I$ (Monotonie in jedem Punkt x).
- Die Grenzfunktion ist stetig.

Finde jeweils eine Folge $(f_n) \subset C(I;\mathbb{R})$, die punktweise gegen eine Grenzfunktion f konvergiert und die jeweils eine der drei Voraussetzungen nicht erfüllt (aber beide anderen), und so dass die Konvergenz $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ nicht gleichmäßig ist.

1. *I nicht kompakt: Sei* $I = (0,1)$, $f_n = -x^n$ *und* $f = 0$.
2. *(f_n) nicht monoton: Sei* $\phi(x) = 1-(x-1)^2$ *für* $x \in [1,2]$ *und* $\phi(x) = 0$ *sonst und setze* $I = [0,1]$, $f_n(x) = \phi(x/n)$ *und* $f(x) = 0$.
3. *Die Grenzfunktion nicht stetig:* $I = [0,1]$, $f_n(x) = x^n$ *und* $f(x) = 0$ *auf* $[0,1)$ *und 1 für* $x = 1$.