Analysis II für M, HLM, Ph

1. Übung
Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 1 Punktweise und Gleichmäßige Konvergenz

Untersuchen Sie folgende Funktionenfolgen bzw. -reihen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz:

$$f_n(x) = \sqrt[n]{n^2x^3}, \quad x \in [0,5]; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{n^3+x^3}, \quad x \in [0,1]; \qquad g_n(x) = \sin\frac{x}{n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- *Für $x \in (0,5]$ gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2x^3} = \lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n})^2 \lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{x})^3 = 1 \cdot 1 = 1.$$

Für $x = 0$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2x^3} = 0.$$

Also ist $\{f_n\}$ punktweise konvergent auf $[0,5]$ mit der Grenzfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}.$$

Da f nicht stetig ist, aber $\{f_n\}$ für jedes $n \in \mathbb{R}$ stetig auf $[0,5]$ ist, kann $\{f_n\}$ nicht gleichmäßig konvergieren (Satz 1.4).

- *Für $x \in [0,1]$ gilt:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{nx^2}{n^3+x^3} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert, konvergiert die Funktionenrehen gleichmäßig auf $[0,1]$ nach Satz 1.14. Damit konvergiert sie insbesondere auch punktweise.

- *Da die Sinus-Funktion stetig ist, gilt $\lim_{n\to\infty} \sin(x/n) = 0$ für alle $x \in R$. Also wir haben die punktweise Konvergenz für $\{g_n\}$.*
Die Konvergenz ist aber nicht gleichmäßig, denn:

$$\text{Setze } x_n = \frac{n\pi}{2} \ (g_n(x_n) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{R}).$$

Dann

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |g_n(x) - g(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |g_n(x)| \geq \lim_{n\to\infty} = 1 > 0.$$

Deswegen ist die Konvergenz nicht gleichmäßig.

G 2 Konvergenz von Funktionenreihen

Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ eine Folge nichtnegativer reeller Zahlen und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ konvergiere für ein $x = x_0 \in \mathbb{R}^+$.
Zeige: Die Reihe konvergiert gleichmäßig auf dem Intervall $[x_0, \infty[$.

Dies folgt sofort aus

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| \frac{a_n}{n^x} \|_{[x_0,\infty[} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}} < \infty$$

und dem Kriterium von Weierstraß.

G 3 Punktweise Konvergenz auf einem kompakten Intervall

Sei $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen $f_n : I \to \mathbb{R}$ auf einem kompakten (abgeschlossenen und beschränkten) Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, daß $\{f_n\}_n$ punktweise gegen eine stetige Grenzfunktion f konvergiert. Finde ein Gegenbeispiel zu der Aussage, dass dann $\{f_n\}_n$ auch gleichmäßig gegen f konvergiert.

Ein Gegenbeispiel ist Beispiel (21.1) aus dem Forster I, Paragraph 21.

Hausübung

H 1 Konvergenz von Funktionenreihen (3 Punkte)

Zeigen Sie, daß die folgende Funktionenreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} [x^n(1-x)] \quad , \ x \in \mathbb{R},$$

auf dem Intervall $[0,1]$ punktweise, aber nicht gleichmäßig konvergiert.

Für $x < 1$ ist $\sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot (1-x) = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} x^n = (1-x)\cdot \frac{1}{1-x} = 1$ (geometrische Reihe). Für $x = 1$ erhalten wir $\sum_{n=0}^{\infty} 1^n \cdot (1-1) = 0$. Die Reihe konvergiert demnach punktweise gegen die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x < 1, \\ 0 & \text{falls } x = 1. \end{cases}$$

Die Konvergenz kann nicht gleichmäßig sein, da die Grenzfunktion unstetig ist. (vgl. Satz über gleichmäßige Konvergenz stetiger Funktionen.)

H 2 Punktweise und gleichmäßige Konvergenz (3 Punkte)

Bestimme für die Funktionenfolgen $\{f_n\}_{k\in\mathbb{N}}$ und $\{g_n\}_{k\in\mathbb{N}}$ jeweils den Grenzwert bezüglich punktweiser Konvergenz und entscheide, ob sie gleichmäßig konvergieren:

$$f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \sqrt{x^2 + \frac{1}{k}}$$

$$g_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} x^j.$$

$(f_n)_n$: *Der punktweise Limes der Funktionenfolge $(f_n)_n$ kann wie folgt bestimmt werden:*

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt{x^2 + \frac{1}{k}} = \sqrt{x^2} = |x|.$$

Als Grenzwert erhalten wir also die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$. Nun schätzen wir den Abstand von $|f_k(x) - f(x)|$ unabhängig von x von oben ab und zeigen so, daß die Folge auch gleichmäßig gegen f konvergiert:

$$\Big|\sqrt{x^2 + \frac{1}{k}} - \sqrt{x^2}\Big| = \Big|\frac{(\sqrt{x^2+\frac{1}{k}} - \sqrt{x^2})\cdot(\sqrt{x^2+\frac{1}{k}} + \sqrt{x^2})}{(\sqrt{x^2+\frac{1}{k}} + \sqrt{x^2})}\Big|$$

$$= \Big|\frac{x^2 + \frac{1}{k} - x^2}{(\sqrt{x^2+\frac{1}{k}} + \sqrt{x^2})}\Big| \le \frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{\sqrt{k}}} = \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Sei also $\varepsilon > 0$. Wir müssen zeigen, daß es ein N gibt, so daß $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $k > N$. Da aber $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = 0$, existiert ein N mit $\frac{1}{\sqrt{N}} < \varepsilon$, also gilt $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $k > N$.

$(g_k)_k$: *Der Grenzwert der zweiten Folge entspricht gerade der Exponentialfunktion:*

$$\lim_{k\to\infty} g_k = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} x^j = e^x.$$

Diese Folge ist nicht gleichmäßig konvergent auf $\mathbb{R}$. *Wieder betrachten wir* $|g_k(x) - g(x)|$, *nur schätzen wir es diesmal von unten ab: Sei* $x > 0$. *Dann gilt*

$$|e^x - \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} x^j| = |\sum_{j=k+1}^{k} \frac{1}{j!} x^j| = \sum_{j=k+1}^{k} \frac{1}{j!} x^j \geq \frac{1}{(k+1)!} x^{k+1}.$$

Für $x = \sqrt[k+1]{(k+1)!}$ *gilt also* $|e^x - h_k(x)| \geq 1$, *d.h. für* $\varepsilon = \frac{1}{2}$ *gibt es kein* $k \in \mathbb{N}$ *so daß* $|e^x - h_k(x)| \leq \varepsilon$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$.

H 3 Gleichmäßige Konvergenz und gleichmäßige Stetigkeit (3 Punkte)

Sei $\{f_n \colon D \to \mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Funktionenfolge, die gleichmäßig gegen $f \colon D \to \mathbb{R}$ konvergiert. Weiterhin, sei $f_n(D) \subseteq D'$ für alle $n \in \mathbb{R}$, und sei $g \colon D' \to \mathbb{R}$ eine gleichmäßig stetige Funktion (D' ist abgeschlossen). Zeige, daß $g \circ f_n$ gleichmäßig gegen $g \circ f$ konvergiert.

Sei $\varepsilon > 0$. *Aufgrund der gleichmäßigen Stetigkeit von* g, *gibt es ein* $\delta > 0$ *mit*

$$|g(x) - g(y)| < \varepsilon \qquad \text{für alle } x, y \in D' \text{ mit } |x - y| < \delta.$$

Da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *gleichmäßig gegen* f *konvergiert, gibt es ein* $N \in \mathbb{N}$ *mit*

$$\sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| < \delta \quad \text{falls } n \geq N.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\sup_{x\in D} |g(f_n(x)) - g(f(x))| < \varepsilon \quad \text{falls } n \geq N.$$