Analysis II für M, HLM, Ph

8. Tutorium
Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 22 Wegzusammenhängende Mengen

Zeige, dass die Abschließung einer wegzusammenhängenden Menge X nicht wegzusammenhängend zu sein braucht.

$X = \{(t, \sin t) \mid t > 0\} \subset \mathbb{R}^2$.
Der Abschluß $\bar{X} = \{(0, y) | \ y \in [-1, 1]\} \cup X$ *ist nicht wegzusammenhängend (Skript, s. 61).*

G 23 Abbildungen von Matrizen

Sei $\mathbb{R}^{n\times n}$ die Menge der $n \times n$-Matrizen.

(i) Sei $|||\cdot|||$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ und $\|\cdot\|$ die durch $|||\cdot|||$ induzierte Operatornorm. Zeige

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\| \quad \text{für alle} \quad A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

(ii) Sei

$$f : \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}, \quad (A, B) \mapsto A^2 B.$$

Zeige, dass f in jedem Punkt (A, B) differenzierbar ist und berechne $f'(A, B)$.

(i) es gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$|||ABx||| \leq \|A\||||Bx||| \leq \|A\|\|B\||||x|||.$$

Somit gilt $\|AB\| = \inf\{|||ABx||| \ , \ x \in \mathbb{R}^n, \ |||x||| = 1\} \leq \inf\{\|A\|\|B\| \ , \ x \in \mathbb{R}^n, \ |||x||| = 1\} = \|A\|\|B\|$.
(ii) Sei $\|\cdot\|$ *die euklidische Norm auf* $\mathbb{R}^{n^2}$*. Diese ist equivalent zu der (von irgendeiner Norm) induzierten Operatornorm* $\|\cdot\|_{Op}$*. Es gilt*

$$\begin{aligned}
f(A + H, B + K) &= (A + H)^2(B + K)\\
&= A^2B + AHB + HAB + H^2B + A^2K + AHK + HAK + H^2K\\
&= f(A, B) + (AHB + HAB + A^2K) + H^2B + AHK + HAK + H^2K.
\end{aligned}$$

Die Abbildung $(H, K) \mapsto AHB + HAB + A^2K$ *ist offenbar linear. Außerdem*

$$\begin{aligned}
\frac{\|H^2B + AHK + HAK + H^2K\|}{\|H\| + \|K\|} &\leq c\frac{\|H^2B + AHK + HAK + H^2K\|_{Op}}{\|H\|_{Op} + \|K\|_{Op}}\\
&\leq c\frac{\|H\|_{Op}^2 B + 2\|A\|_{Op}\|H\|_{Op}\|K\|_{Op} + \|H\|_{Op}^2\|K\|_{Op}}{\|H\|_{Op} + \|K\||Op}\\
&\leq c\frac{\|H\|_{Op}^2\|B\|_{Op} + 2\|A\|_{Op}\|H\|_{Op}\|K\|_{Op} + \|H\|_{Op}^2\|K\|_{Op}}{\|H\|_{Op}}\\
&\leq c(\|H\|_{Op}\|B\|_{Op} + 2\|A\|_{Op}\|K\|_{Op} + \|H\|_{Op}\|K\|_{Op})\\
&\xrightarrow{(H,K)\to 0} 0.
\end{aligned}$$

G 24 Differenzierbarkeit und Gleichmäßige Stetigkeit

Eine Teilmenge M eines reellen oder komplexen Vektorraum V ist konvex, wenn für alle $a, b \in M$ stets auch $\lambda a + (1 - \lambda)b \in M$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq \lambda \leq 1$ gilt.

Zeige, dass eine Funktion f, die beschränkte partielle Ableitungen f'_x und f'_y auf einem konvexen Gebiet Ω besitzt, gleichmäßig stetig auf diesem Gebiet ist.

Seien (x_1, y_1) und (x_2, y_2) zwei beliebige Punkte aus Ω. Dann wegen der Konvexität liegt der Punkt $(x_2 + t(x_1 - x_2), y_2 - t(y_1 - y_2))$ für $t \in [0, 1]$ auch in Ω.
Die Funktion $\phi(t) = f(x_2 + t(x_1 - x_2), y_2 - t(y_1 - y_2))$ hat für $t \in [0, 1]$ die beschränkte Ableitung (nach der Kettenregel):

$$\phi'(t) = f'_x(x_2+t(x_1-x_2), y_2-t(y_1-y_2))\cdot(x_1-x_2)+f'_y(x_2+t(x_1-x_2), y_2-t(y_1-y_2))\cdot(y_1-y_2)$$

und $\phi(0) = f(x_2, y_2)$, $\phi(1) = f(x_1, y_1)$. Nach dem Mittelwertsatz erhalten wir

$$f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2) = \phi(1) - \phi(0) = \phi'(\xi) = f'_x(x_2 + \xi(x_1 - x_2), y_2 - t(y_1 - y_2)) \cdot (x_1 - x_2)$$
$$+f'_y(x_2 + \xi(x_1 - x_2), y_2 - t(y_1 - y_2)) \cdot (y_1 - y_2), \quad \xi \in (0, 1).$$

Sei jetzt $\epsilon > 0$ beliebig ausgewählt und $\delta := \min \epsilon/(2L_1), \epsilon/(2L_2)$, wobei

$$|f'_x(x, y)| \leq L_1, \quad |f'_y(x, y)| \leq L_2 \quad \forall (x, y) \in \Omega$$

sind. Dann für alle Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) aus Ω mit $|x_1 - x_2| < \delta$ und $|y_1 - y_2| < \delta$ bekommen wir, dass

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq L_1|x_1 - x_2| + L_2|y_1 - y_2| < \epsilon$$

gilt. Das beweist die gleichmäßige Stetigkeit von f auf dem konvexen Gebiet Ω.