Analysis II für M, HLM, Ph

7. Tutorium
Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 19 Gleichmäßige Stetigkeit

Sei die Funktion

$$f(x,y) = \arcsin\frac{x}{y}$$

gegeben. Ist diese Funktion stetig auf ihrem Definitionsbereich $D(f)$? Ist diese Funktion gleichmäßig stetig auf $D(f)$?

$D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq |y|,\ y \neq 0\}$.
Die Funktion ist nicht gleichmäßig stetig auf $D(f)$, da zwei Folgen $M_n = (1/n, 1/n)$ und $M'_n = (1/n, -1/n)$ mit

$$\|M_n - M'_n\|_{\mathbb{R}^2} = 2/n \to 0$$

existieren, so dass

$$|f(M_n) - f(M'_n)| = |\arcsin(1) - \arcsin(-1)| = \pi \not\to 0$$

gilt.

G 20 Lineare Abbildungen

Sei $f \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ und

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\|.$$

Zeige:

$$\|f\| = \inf\{C \geq 0 \mid \|f(x)\| \leq C\|x\|,\ \forall x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Wir merken zuerst, dass

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}.$$

Dann nach der Definition vom Supremum erhalten wir

$$\forall \epsilon > 0\ \exists x_\epsilon \in \mathbb{R}^n : \|f(x_\epsilon)\| \geq (\|f\| - \epsilon)\|x_\epsilon\|.$$

Aber das stimmt mit der Definition vom Infimum, das in der Aufgabe steht, überein.

G 21 Zusammenhängende Mengen

Sei $\{X_i\}_{i \in I}$ eine Familie zusammenhängender Teilmengen von $\mathbb{R}^n$, die sich paarweise schneiden. Dann ist die Vereinigung

$$X := \bigcup_{i \in I} X_i$$

ebenfalls zusammenhängend.

Heuser, Teil II, Satz 160.5 s.237