# Analysis II für M, HLM, Ph

## 6. Tutorium

### Lösungsvorschlag

**Gruppenübung**

**G 16 Nullmengen**

- Zeige, daß $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ eine Lebesgue-Nullmenge ist.
- Zeige, daß $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ keine Jordan-Nullmenge ist.
- Zeige, daß $\{\frac{1}{n} \mid \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ eine Jordan-Nullmenge ist.

- *Es sei* $\varepsilon > 0$ *beliebig und* $q_1, q_2, q_3 \ldots$ *eine Abzählung von* $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$. *Zu* $q_j$, $j \in \mathbb{N}$ *wählen wir ein abgeschlossenes Rechteck* $R_j$ *mit Mittelpunkt* $q_j$ *und Kantenlänge* $\frac{\varepsilon}{2^j}$ *(also das Intervall* $]q_j - \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}, q_j + \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}[$. *Dann ist*

$$[0, 1] \cap \mathbb{Q} \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j$$

  *und*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |R_j| = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^j} = \varepsilon.$$

  *Per Definition ist* $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ *damit eine Lebesque-Nullmenge.*
- *Sei* $R_1, \ldots, R_N$ *eine endliche Überdeckung von* $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ *mit abgeschlossenen Rechtecken.*

  *Behauptung: Dann gilt* $[0, 1] \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} R_j$.

  *Beweis: Da* $R_1, \ldots R_N$ *abgeschlossen sind, ist auch* $\bigcup_{j=1}^{N} R_j$ *abgeschlossen. Wegen* $[0, 1] \cap \mathbb{Q} \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} R_j$ *folgt* $[0, 1] = \overline{[0, 1] \cap \mathbb{Q}} \subseteq \overline{\bigcup_{j=1}^{N} R_j} = \bigcup_{j=1}^{N} R_j$.

  *Aus der Behauptung folgt, daß für jede endliche Überdeckung von* $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ *gilt*

$$\sum_{j=1}^{N} |R_j| \geq |[0, 1]| = 1.$$

  *Also kann* $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ *keine Jordan-Nullmenge sein.*
- *Es sei* $\varepsilon > 0$. *Da* $\frac{1}{n} \overset{n \to \infty}{\to} 0$, *gibt es ein* $N \in \mathbb{N}$ *so daß* $\frac{1}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ *für alle* $n \geq N$ *gilt. Wir setzen nun*

$$R_1 := \left[0, \frac{\varepsilon}{2}\right], R_j := \left[\frac{1}{j}, \frac{1}{j} + \frac{\varepsilon}{2N}\right] \ (j = 2, \ldots, N).$$

  *Dann gilt*

$$\{\frac{1}{n} \mid \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} R_j \text{ und } \sum_{j=0}^{N} |R_j| = \frac{\varepsilon}{2} + (N - 1) \cdot \frac{\varepsilon}{2N} < \varepsilon.$$

  *Also ist* $\{\frac{1}{n} \mid \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ *eine Jordan-Nullmenge.*

**G 17** $C([a, b])$**: ein unendlichdimensionaler Banachraum**

Zeige, dass die Einheitskugel auf dem unendlichdimensionalemn Banachraum $C([a, b])$ nicht kompakt ist.

*Wir suchen uns eine Folge (in der Einheitskugel), die keine konvergente Teilfolge besitzt. Sei o.B.d.A.* $[a,b]=[0,1]$. *Wir setzen*

$$\begin{aligned} f_n\colon [0,1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1-nx & \text{für } x<\frac{1}{n} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

*Die einzelnen Funktionen* $f_n$ *sind alle stetig und es gilt* $\|f_n\|=1$, *also* $f_n\in B_1(0)$. *Aber: Die Folge* $(f_n)_n$ *konvergigert nicht gleichmäßig. Zwar konvergiert* $f_n$ *punktweise, jedoch gegen die unstetige Funktion*

$$\begin{aligned} f\colon [0,1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } x=1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

*Damit kann* $(f_n)_n$ *keine konvergente Teilfolge haben.*

**G 18 Wegzusammenhängende Mengen**

Es seien $D\subset\mathbb{R}^n$ eine wegzusammenhängende Menge und $f:D\to\mathbb{R}$ stetig. Zeige, dass dann $f(D)$ ein Intervall in $\mathbb{R}$ ist.

*Folgerung von Satz 3.36.*