Analysis II für M, HLM, Ph

5. Tutorium

Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 13 Abgeschlossene Mengen

Seien A, B abgeschlossene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$. Man definiert der Abstand zwischen A und B durch $d(A,B) := \inf \|a-b\|$ für $a \in A$ und $b \in B$.

Gebe ein Beispiel von zwei disjunkten abgeschlossenen Mengen aus $\mathbb{R}^2$, der Abstand zwischen denen gleich Null ist.

$A = \{(x,y) \mid xy = 1\}, \quad B = \{(x,y) \mid y = 0\}$.
A, B sind abgeschlossene und disjunkte Teilmengen von $\mathbb{R}^2$.
Aber für jedes $\epsilon > 0$ existieren $(2/\epsilon, \epsilon/2) \in A$ und $(2/\epsilon, 0) \in B$, so dass der Abstand zwischen diesen Punkten gleich $\epsilon/2$ und kleiner als ϵ ist.

G 14 Nullmengen

Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Nullmenge* oder *Menge vom Maß 0*, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ eine höchtens abzählbar Überdeckung $\{Q_i\}_{i \in A}$ von M durch offene (oder abgeschlossene) Intervalle Q_i[1] gibt, so dass

$$\sum_{i \in A} |Q_i| < \epsilon.$$

Zeige:

a) Jede Teilmenge einer Nullmenge ist eine Nullmenge.
b) Jede endliche Menge von Punkten ist eine Nullmenge.
c) Die Vereinigung höchstens abzählbar vieler Nullmengen ist wieder eine Nullmenge.
d) Eine kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine Nullmenge, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ eine endliche Überdeckung $\{Q_i\}_{i=1}^n$ mit offenen (oder abgeschlossenen) Intervallen gibt, so dass

$$\sum_{i=1}^n |Q_i| < \epsilon.$$

Heuser (1990), Lehrbuch der Analysis, Teil 1, Satz X.84.1, s. 470.

G 15 Riemann-Integrierbarkeit

Wir sagen eine Aussage $p = p(x)$ gilt *fast überall* (f. ü.) in $M \subset \mathbb{R}^n$, falls die Menge $\{x \in M \mid p(x) = \text{falsch}\}$ eine Nullmenge ist.

Zeige: Sei $f \in \mathcal{R}([a,b])$, dann gilt

$$\int_a^b |f(x)| dx = 0 \Leftrightarrow f = 0 \ \text{ f.ü.}$$

- *Sei $\int_a^b |f(x)|dx = 0$ und $A := [a,b] \setminus B(f)$, wobei $B(f)$ eine Nullmenge ist.*
  Sei $\xi \in A$ und $f(\xi) \neq 0$, dann existiert eine offene Kugel $U_\delta(\xi)$, so dass

$$0 < \frac{|f(\xi)|}{2} \leq |f(x)| \quad \forall x \in U_\delta(\xi),$$

[1] $Q_i := \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i < x < b_i\}$, $|Q_i| := \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$.

woraus wir schliessen

$$\int_a^b |f(x)|dx \geq \int_{U_\delta(\xi)} |f(x)|dx \geq \frac{|f(\xi)|}{2}\delta > 0;$$

Widerspruch.

- *Sei* $f = 0$ *f.ü. und* $A = \{x \in [a,b] \mid f(x) \neq 0\}$*, dann liegt* $[a,b] \setminus A$ *dicht in* $[a,b]$*, denn sonst existiert* $\xi \in (a,b)$ *und* $\delta > 0$*, so dass* $U_\delta(\xi) \subset A$*.*
  Dies aber ein Widerspruch zur der Annahme, dass A *eine Nullmenge ist, denn wähle zu* $0 < \epsilon < \delta/2$ *eine h.a. Überdeckung* $\{Q_i\}$ *von* A *durch offene Intervalle mit* $\sum_i |Q_i| < \epsilon$*, dann überdecken endlich viele* Q_i *den Kompakt* $\overline{U_{\delta/2}(\xi)}$ *und wir erhalten*

  $$\delta = |U_{\delta/2}(\xi)| \leq \sum_i |Q_i| < \epsilon < \delta/2;$$

  Widerspruch.
  f *verschwindet daher auf einer dichten Teilmenge, woraus die Behauptung* $\int_a^b |f(x)|dx = 0$ *folgt.*