Analysis II für M, HLM, Ph

4. Tutorium

Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 10 Partielle Integration

Berechne das folgende Integral:

$$\int_0^a e^{-2x} \cos x dx, \quad a > 0.$$

Das Integral läßt sich mit partieller Integration lösen. Man setzt

$$\begin{aligned} u(x) &= \cos x & u'(x) &= -\sin x \\ v'(x) &= e^{-2x} & v(x) &= -\tfrac{1}{2} e^{-2x} \end{aligned}$$

und erhält

$$\int_0^a e^{-2x} \cos x dx = -\tfrac{1}{2} e^{-2x} \cos x \Big|_0^a - \tfrac{1}{2} \int_0^a e^{-2x} \sin x dx.$$

Nochmaliges Anwenden partieller Integration mit

$$\begin{aligned} u(x) &= \sin x & u'(x) &= \cos x \\ v'(x) &= e^{-2x} & v(x) &= -\tfrac{1}{2} e^{-2x} \end{aligned}$$

führt zu

$$\int_0^a e^{-2x} \cos x dx = -\tfrac{1}{2} e^{-2x} \cos x \Big|_0^a + \tfrac{1}{4} e^{-2x} \sin x \Big|_0^a - \tfrac{1}{4} \int_0^a e^{-2x} \cos x dx,$$

d.h.

$$\begin{aligned} \tfrac{5}{4} \int_0^a e^{-2x} \cos x dx &= \tfrac{1}{2} e^{-2x} \cos x \Big|_0^a + \tfrac{1}{4} e^{-2x} \sin x \Big|_0^a \\ \int_0^a e^{-2x} \cos x &= -\tfrac{2}{5} e^{-2x} \cos x \Big|_0^a + \tfrac{1}{5} e^{-2x} \sin x \Big|_0^a \\ &= -\tfrac{2}{5} \Big[e^{-2a} \cos a - 1 \Big] + \tfrac{1}{5} \Big[e^{-2a} \sin a - 0 \Big]. \end{aligned}$$

G 11 Riemann-Integrierbarkeit I

Zeige: Die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar genau dann, wenn für jede Folge P_j von Partitionen $P_j = \{a = x_0^{(j)}, x_1^{(j)}, ..., x_{n_j}^{(j)} = b\}$ mit

$$\lim_{j\to\infty} \max \{\triangle x_1^{(j)}, ..., \triangle x_{n_j}^{(j)}\} = 0$$

und für jede Wahl von Zahlen $t_i^{(j)} \in [x_{i-1}^{(j)}, x_i^{(j)}]$ der Grenzwert $\lim_{j\to\infty} S(f, P_j)$ mit

$$S(f, P_j) := \sum_{i=1}^{n_j} f(t_i^{(j)}) \triangle x_i^{(j)}$$

existiert.

H. Heuser (1990), Lehrbuch der Analysis, Teil 1, Satz X.83.1, s. 468.

G 12 Riemann-Integrierbarkeit II

Mit Hilfe des Riemann-Integrals von einer passend ausgewählten Funktion berechne den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{3n}\right).$$

Also

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{3n}=\frac{1}{2n}\left(\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}}+\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{2}{2n}}+...+\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{2n}{2n}}\right).$$

Da $f(x)=1/(1/2+x)$ *stetig auf* $[0,1]$ *ist, erhalten wir wegen G11*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{3n}\right)=\int_0^1\frac{2}{1+2x}dx=\ln 3.$$