

Fundamentallemma der Variationsrechnung

Für $-\infty < a < b < +\infty$ sei

$$C_0^1([a, b]) := \left\{ \varphi \in C^1([a, b]) \mid \varphi(a) - \varphi(b) = 0 \right\}.$$

LEMMA 1 Für $u \in C([a, b])$ gelte

$$(1) \quad \int_a^b u \varphi' dt = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^1([a, b]).$$

Dann ist

$$u(t) = \frac{1}{b-a} \int_a^b u ds \quad \forall t \in [a, b].$$

BEWEIS Für $c_0 \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$\varphi_0(t) := \int_a^t (u(s) - c_0) ds, \quad t \in [a, b].$$

Es gilt

$$\varphi_0(a) = 0, \quad \varphi_0'(t) = u(t) - c_0 \quad \forall t \in [a, b].$$

Wir bestimmen nun c_0 so, daß $\varphi_0(b) = 0$, d.h.

$$0 = \varphi_0(b) = \int_a^b (u(s) - c_0) ds = \int_a^b u ds - c_0(b-a),$$

also:

$$c_0 = \frac{1}{b-a} \int_a^b u ds.$$

Die Funktion φ_0 ist zulässig in (1). Es folgt

$$\begin{aligned} \int_a^b (u(t) - c_0)^2 dt &= \int_a^b (u(t) - c_0) \varphi_0'(t) dt \\ &= \int_a^b u \varphi_0' dt - c_0 \int_a^b \varphi_0' dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dies impliziert

$$u(t) - c_0 = 0 \quad \forall t \in [a, b].$$

■

Bemerkung 1 Für $u \in C([a, b])$ sind äquivalent:

$$1^\circ \int_a^b u \varphi' dt = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^1([a, b]);$$

$$2^\circ \int_a^b u \psi dt = 0 \quad \forall \psi \in C([a, b]) \text{ mit } \int_a^b \psi dt = 0.$$

■

LEMMA 2 (Fundamentallemma der Variationsrechnung) Für die Funktionen $u, v \in C([a, b])$ gelte

$$(2) \quad \int_a^b (u\varphi + v\varphi') dt = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^1([a, b]).$$

Dann gilt:

- $\exists v' \in C([a, b])$,
- $u(t) - v'(t) = 0 \quad \forall t \in [a, b]$.

BEWEIS Wir definieren

$$U(t) := \int_a^t u ds, \quad t \in [a, b].$$

Aus der Definition von U ergibt sich

$$U'(t) = u(t) \quad \forall t \in [a, b],$$

$$\begin{aligned} \int_a^b u \varphi dt &= \int_a^b U' \varphi dt = U \varphi \Big|_{t=a}^{t=b} - \int_a^b U \varphi' dt \\ &= - \int_a^b U \varphi' dt \quad \forall \varphi \in C_0^1([a, b]). \end{aligned}$$

Daher kann (2) wie folgt geschrieben werden:

$$\int_a^b (-U + v)\varphi' dt = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^1([a, b]).$$

Lemma 1 impliziert nun

$$-U(t) + v(t) = \frac{1}{b-a} \int_a^b (-U + v) ds \quad \forall t \in [a, b],$$

also

$$v(t) = \int_a^t u ds + \frac{1}{b-a} \int_a^b \left(- \int_a^s u d\tau + v(s) \right) ds \quad \forall t \in [a, b].$$

Hieraus folgen die Behauptungen. ■

FOLGERUNG 1 Für $u \in C([a, b])$ gelte

$$(3) \quad \int_a^b u\varphi dt = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^1([a, b]).$$

Dann ist

$$u(t) = 0 \quad \forall t \in [a, b].$$

BEWEIS Lemma 2 mit $v = 0$ anwenden. ■

Bemerkung 2 Die Aussage von Folgerung 1 bleibt gültig, wenn in (3) anstelle von $C_0^1([a, b])$ andere Mengen von Testfunktionen betrachtet werden.

Wir definieren

$$C_0([a, b]) := \left\{ \psi \in C([a, b]) \mid \psi(a) = \psi(b) = 0 \right\},$$

$$C_c([a, b]) := \left\{ \zeta \in C([a, b]) \mid \text{supp}(\zeta) \subset]a, b[\right\}$$

- Vektorraum der stetigen Funktionen auf $]a, b[$, mit Träger in $]a, b[$.

wobei:

$$\text{supp}(u) := \overline{\{t \in]a, b[\mid u(t) \neq 0\}}$$

Es gilt:

Für $u \in C([a, b])$ sind äquivalent:

$$1^\circ \int_a^b u \varphi dt = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^1([a, b]);$$

$$2^\circ \int_a^b u \zeta dt = 0 \quad \forall \zeta \in C_c([a, b]);$$

$$3^\circ \int_a^b u \psi dt = 0 \quad \forall \psi \in C_0([a, b]).$$

BEWEIS $1^\circ \Leftrightarrow 2^\circ$: jede Funktion aus $C_c([a, b])$ kann durch Funktionen aus $C_c^\infty([a, b])$ im Sinne der Norm in $C([a, b])$ approximiert werden.

$2^\circ \Leftrightarrow 3^\circ$: für jedes $\psi \in C_0([a, b])$ existiert eine Folge $(\psi_k) \subset C_c([a, b])$, so daß

$$\psi_k \rightarrow \psi \text{ in } C([a, b]).$$

$3^\circ \Leftrightarrow 1^\circ$: klar.

EULER-LAGRANGEsche Gleichungen

Sei $f = f(t, x, y)$ eine Funktion aus $C([a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, so daß

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial y_i} \in C([a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \quad (i = 1, \dots, n).$$

Wir betrachten das Funktional

$$\mathcal{F}(u) := \int_a^b f(t, u(t), u'(t)) dt, \quad u \in C^1([a, b]; \mathbb{R}^n).$$

Eine einfache Rechnung ergibt

$$\begin{aligned} D\mathcal{F}(u; h) &:= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} (\mathcal{F}(u + \lambda h) - \mathcal{F}(u)) \\ &= \sum_{i=1}^n \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(t, u, u') h_i + \frac{\partial f}{\partial y_i}(t, u, u') h'_i \right) dt \end{aligned}$$

für alle $u, h \in C^1([a, b]; \mathbb{R}^n)$.

SATZ Für $u \in C^1([a, b]; \mathbb{R}^n)$ gelte

$$D\mathcal{F}(u; h) = 0 \quad \forall h \in C_0^1([a, b]; \mathbb{R}^n)$$

„Prinzip der virtuellen Arbeit“

Dann gilt:

- $\frac{\partial f}{\partial y_i}(\cdot, u, u') \in C^1([a, b])$,
- $\frac{\partial f}{\partial x_i}(t, u(t), u'(t)) - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial y_i}(t, u(t), u'(t)) = 0 \quad \forall t \in [a, b]$
($i = 1, \dots, n$) EULER-LAGRANGEsche Gleichungen.

BEWEIS Lemma 2 komponentenweise anwenden. ■

Anhang

Die Aussagen von Lemma 1 und Folgerung 1 können in analoger Weise für lokal integrierbare Funktionen mehrerer Veränderlicher formuliert werden.

Sei $E \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.

SATZ 1 Sei $u \in L^1_{\text{loc}}(E)$.

1. Es gelte

$$\int_E u \varphi dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(E).$$

Dann ist

$$u(x) = 0 \quad \text{für f.a. } x \in E.$$

2. Es gelte

$$\int_E u \psi dx = 0 \quad \forall \psi \in C_c^\infty(E) \quad \text{mit} \quad \int_E \psi dx = 0.$$

Dann gilt für jede meßbare Menge $E_0 \subseteq E$ mit $0 < \lambda_n(E_0) < +\infty$:

$$u(x) = \frac{1}{\lambda_n(E_0)} \int_{E_0} u dy \quad \text{für f.a. } x \in E.$$

SATZ 2 Sei $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ein **Gebiet**. Für $u \in L^1_{\text{loc}}(E)$ sind äquivalent:

1° $\exists c_0 = \text{const} : u(x) = c_0$ für f.a. $x \in E$;

2° $\int_E u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(E), \forall i \in \{1, \dots, n\}$.