Analysis II für M, HLM, Ph

2. Tutorium
Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 4 Potenzreihe

1. Bestimme die Konvergenzradien der folgenden Reihen:

$$\text{(i)} \sum_{k=0}^{\infty}(k+\sin(k))(x-2)^k \qquad \text{(ii)} \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{k^2}(x-1)^{5k} \qquad \text{(iii)} \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}.$$

2. Nach dem Skript ist der Wert der Reihe in (iii) $\arctan(x)$. Wieso ist mit diesem Wissen das Ergebnis in (iii) überraschend?

1. (a) Es ist $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{k+\sin(k)}{k+1+\sin(k+1)}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{1+\frac{\sin(k)}{k}}{1+\frac{1}{k}+\frac{\sin(k+1)}{k}}\right|.$

Da $-\frac{1}{k}\leq\frac{\sin(k)}{k}\leq\frac{1}{k}$, *gilt* $\lim_{k\to\infty}\frac{\sin(k+1)}{k} = \lim_{k\to\infty}\frac{\sin(k)}{k} = 0,$

und damit $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \frac{1+0}{1+0+0} = 1.$

Also ist der Konvergenzradius nach dem Quotientenkriterium 1.

(b) Mit $z=(x-5)^5$ *schreibt sich die gegebene Reihe als* $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{k^2}z^k$.

Wir bestimmen zunächst den Konvergenzradius dieser Reihe: Wegen

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left|\frac{2^k}{k^2}\right|} = \lim_{k\to\infty}\frac{2}{(\sqrt[k]{k})^2} = \frac{2}{1^2} = 2$$

ist dieser $\frac{1}{2}$ *nach dem Wurzelkriterium. Also konvergiert die ursprüngliche Reihe für alle* $x\in\mathbb{R}$ *mit*

$$|x-1|^5 = |z| < \tfrac{1}{2}, \quad \text{d.h.} \quad |x-1| < \tfrac{1}{\sqrt[5]{2}}.$$

Der Konvergenzradius ist damit $\frac{1}{\sqrt[5]{2}}$.

(c) Es ist

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(-1)^k}{2k}\cdot\frac{2k+1}{(-1)^{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{2k+1}{2k} = 1.$$

Der Konvergenzradius ist also 1 nach dem Quotientenkriterium.

2. Die Funktion arctan *ist auf ganz* $\mathbb{R}$ *definiert, wird aber nur auf dem Intervall* $(-1,1]$ *durch die in (iv) gegebene Potenzreihe dargestellt. Die Potenzreihendarstellung gilt also i.A. nicht auf dem maximal möglichen Bereich.*
(Der Grund ist erst ersichtlich, wenn man den arctan *als Funktion einer komplexen Variablen betrachtet)*

G 5 Funktionenreihen

Sei die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ gleichmäßig und absolut auf einer Menge A konvergent. Konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|$ dann gleichmäßig auf A?

Nein. Wir betrachten

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n, \quad A=[0,1].$$

Die Reihe konvergiert gleichmäßig auf A.
Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n$ *konvergiert punkweise aber nicht gleichmäßig auf A (siehe H1).*

G 6 Gleichmäßige Konvergenz

Überprüfe die folgende Funktionenfolge und Funktionenreihe auf gleichmäßige Konvergenz:

$$f_n(x) = \arctan \frac{2x}{x^2+n^3}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(n^2(1+x^2)\right) \right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Hinweis. $\arctan x + \arctan(1/x) = \pi/2,\ x > 0.$

(a) Da $\left|\arctan \frac{2x}{x^2+n^3}\right| \leq \arctan \frac{1}{\sqrt{n^3}}$ *ist*

$$\left(\sup_x \frac{2x}{x^2+n^3} = \sqrt{n^3} \right),$$

konvergiert die Funktionenfolge gleichmäßig gegen die Nullfunktion.

(b) Da $\arctan y + \arctan(1/y) = \pi/2,\ y > 0$ *gilt, erhalten wir*

$$\frac{\pi}{2} - \arctan\left(n^2(1+x^2)\right) = \arctan \frac{1}{n^2(1+x^2)} \leq \arctan \frac{1}{n^2},$$

wobei wir die Monotonie von $y \mapsto \arctan y$ *benutzt haben. Nach dem Satz von Weierstraß konvergiert die Funktionreihe gleichmäßig, denn die Ungleichung*

$$\arctan \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

(siehe $\mathbf{http://en.wikipedia.org/wiki/Proofs_of_trigonometric_identities}$ *(1.9), falls notwendig) gilt.*

G 7 Gleichmäßige Konvergenz

Zeige, dass die Grenzfunktion von einer gleichmäßig konvergenten Funktionenfolge aus gleichmäßig stetigen Funktionen eine gleichmäßig stetige Funktion ist.

Sei $\epsilon > 0$ *beliebig ausgewählt.*
Gleichmäßige Konvergenz von einer Funktionenfolge:
Existiert n_0*, so dass* $|f_{n_0}(x) - f(x)| < \epsilon/3$ *für alle* $x\mathbb{R}$*. Gleichmäßige Stetigkeit von* f_{n_0}*:*
Existiert $\delta > 0$*, so dass* $|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x')| < \epsilon/3$ *für alle* $|x - x'| < \delta$*.*
Deswegen

$$|f(x) - f(x')| \leq |f_{n_0}(x) - f(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x')| + |f_{n_0}(x') - f(x')| < \epsilon.$$