Analysis II für M, HLM, Ph

1. Tutorium
Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 1 Funktionenfolge

Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Der Abschluß

$$supp(g) := \overline{\{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\}}$$

in $\mathbb{R}$ der Menge $\{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\}$ heißt *Träger* von g.

Sei nun $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit kompaktem Träger. (Die Menge $supp(g)$ ist also eine abgeschlossene, beschränkte Menge.) Sei $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ die Funktionenfolge mit

$$g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto g(x+n).$$

1. Zeige, daß die Funktionenfolge punktweise konvergiert und bestimme die Grenzfunktion.
2. Für welche Funktionen g liegt gleichmäßige Konvergenz von $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ vor?

1. *Wir zeigen, daß die Funktionenfolge punktweise gegen die Nullfunktion konvergiert. Da der Träger von g kompakt ist, besitzt die Menge*

$$\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}$$

eine obere Schranke s. Sei nun $x \in \mathbb{R}$. Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N \geq s - x$. Für $n \geq N$ gilt nun

$$x + n \geq x + N \geq s,$$

also $g_n(x) = 0$.

2. *Offensichtlich gilt $\|g_n\| = \|g\|$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Funktionenfolge konvergiert genau dann gleichmäßig gegen die Nullfunktion, wenn $\|g\| = 0$ gilt, was genau dann der Fall ist, wenn g die Nullfunktion ist.*

G 2 Abelsches Kriterium für gleichmäßige Konvergenz

Wir wollen nun mit Hilfe partieller Summation den folgenden Satz beweisen:

Satz

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Seien $\{f_n : D \to \mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{g_n : D \to \mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen von beschränkten Funktionen mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *konvergiert gleichmäßig auf D.*

(ii) Einer der folgenden Fälle tritt ein:

(a) $g_n(s) \leq g_{n+1}(s)$ *für alle $n \in \mathbb{N}$ und $s \in D$,*

(b) $g_n(s) \geq g_{n+1}(s)$ *für alle $n \in \mathbb{N}$ und $s \in D$.*

(iii) Es gibt eine Konstante $M > 0$ derart, daß $|g_n(s)| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $s \in D$ gilt.

Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n$$

gleichmäßig auf D.

Wir werden nun den Satz in mehreren Schritten beweisen.

1. Setze $f := \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ und sei $F_k := \sum_{n=1}^{k} f_n$. Überlege, daß ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so daß
$$|F_k(s) - f(s)| < \epsilon/4M$$
für $k > N$ gilt.
2. Zeige, daß
$$\left\| \sum_{k=m}^{n-1} (F_k - f)(g_{k+1} - g_k) \right\| \leq \frac{\varepsilon}{4M} |g_n - g_m|$$
für $n > m > N$ gilt. (Hier geht (ii) ein!)
3. Zeige, daß
$$\| \sum_{k=n}^{m} f_k g_k \| \leq \varepsilon \quad \text{für} \quad n > m > N$$
gilt.
4. Schließe daraus, daß $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ gleichmäßig konvergiert.

1. *Dies ergibt sich aus der gleichmäßigen Konvergenz der Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.*
2. *Wir betrachten den Fall (a). Der andere geht analog.*
$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{k=m}^{n-1} (F_k - f)(g_{k+1} - g_k) \right\| &= \sup_{s \in D} \left| \sum_{k=m}^{n-1} (F_k(s) - f(s))(g_{k+1}(s) - g_k(s)) \right| \\
&\leq \sup_{s \in D} \left(\sum_{k=m}^{n-1} \frac{\varepsilon}{4M} \underbrace{(g_{k+1}(s) - g_k(s))}_{\geq 0} \right) \\
&= \sup_{s \in D} \frac{\varepsilon}{4M} (g_n(s) - g_m(s)) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{4M} \|g_n - g_m\|
\end{aligned}$$
3. *Mit Hilfe der partiellen Summation erhalten wir*
$$\begin{aligned}
\sum_{k=m}^{n} f_k g_k &= F_n g_n - F_{m-1} g_m - \sum_{k=m}^{n-1} F_k (g_{k+1} - g_k) \\
&\quad -f \underbrace{\left[g_n - g_m - \sum_{k=m}^{n-1} (g_{k+1} - g_k) \right]}_{=0} \\
&= (F_n - f) g_n - (F_{m-1} - f) g_m - \sum_{k=m}^{n-1} (F_k - f)(g_{k+1} - g_k).
\end{aligned}$$
Es ergibt sich also die Abschätzung
$$\left\| \sum_{k=m}^{n} f_k g_k \right\| \leq \frac{\varepsilon}{4M} (|g_n| + |g_m| + |g_n - g_m|) \leq \frac{\varepsilon}{4M} 2(|g_n| + |g_m|) \leq \varepsilon.$$
4. *Dies ergibt sich durch Anwendung des Satzes auf Seite 138 unten auf die Partialsummen der Reihe.*

G 3 (Anwendung des Abelschen Kriteriums für gleichmäßige Konvergenz)
Sei $a > 0$ und setze
$$h_n : [0, a] \to \mathbb{R},\ x \mapsto (-1)^n \frac{x+n}{n^2}.$$

1. Zeige daß $\sum_{n=1}^{\infty} h_n$ gleichmäßig konvergiert.
2. Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} |h_n(x)|$?

1. *Mit dem Satz aus der vorangehenden Aufgabe und mit der Zerlegung $h_n = f_n g_n$ mit*
$$f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{n}, \quad g_n : x \mapsto \frac{x+n}{n}$$
folgt die gleichmäßige Konvergenz.
2. *Für jedes $x \in [0, a]$ hat die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x+n}{n^2}$ die divergente Minorante $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Also divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |h_n|$ in jedem Punkt.*