Analysis II für M, HLM, Ph

14. Tutorium

Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 39 Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^2$

Skizziere grob die Mengen und begründe, welche davon 1-dimensionale Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^2$ sind:

$$E := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + 4y^2 = 1\big\}\,; \quad L := \mathbb{R} \times \{0\}\,; \quad G := \big\{(x, \sin(x)) \colon x \in]0,\pi[\big\}\,;$$

$$R := \partial\left([0,1]^2\right); \quad D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 < 1\}; \quad M := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y^2 = x^2(1-x^2)\big\}.$$

E ist eine Ellipse. Diese ist die Nullstellenmenge

$$E \;=\; \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon f(x,y) = 0\}$$

der stetig differenzierbaren Funktion $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := x^2 + 4y^2 - 1$, wobei

$$\operatorname{grad} f(x,y) \;=\; \big(2x,\, 8y\big) \;\neq\; (0,0)$$

für alle $(x,y) \in E$ (da $(x,y) \neq 0$). Also ist E eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$.
L ist die x-Achse in $\mathbb{R}^2$. Diese ist die Nullstellenmenge der stetig differenzierbaren Funktion

$$f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \qquad f(x,y) \;:=\; y\,.$$

Da $\operatorname{grad} f(x,y) = (0,1) \neq 0$ für alle $(x,y) \in L$, ist L eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$.
G ist der Graph der stetig differenzierbaren Funktion $h \colon]0,\pi[\to \mathbb{R}$, $h(x) := \sin x$ und somit eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$. Von Hand sieht man dies wie folgt:

$$f \colon]0,\pi[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad f(x,y) \;:=\; h(x) - y$$

ist stetig differenzierbar, hat G als Nullstellenmenge, und es ist $\operatorname{grad} f(x,y) = (h'(x), -1) \neq (0,0)$ für alle $(x,y) \in G$.
R ist der Rand eines Quadrats. Da Mannigfaltigkeiten "glatte" Objekte sind, machen uns die "Ecken" von R bereits misstrauisch. Um mathematisch auf den Punkt zu bringen, dass R tatsächlich keine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$ ist, benutzen wir, dass jede solche Untermannigfaltigkeit lokal der Graph einer Funktion von x oder von y ist. Die Punkte von R in der Nähe der Ecke $(0,0)$ lassen sich jedoch offensichtlich nicht in der Form $(x, f(x))$ beschreiben (weil $\{0\} \times [0,1] \subseteq R$, sind viele verschiedene y-Werte möglich, nicht nur einer!) Ebenso lassen sich die Punkte dort nicht in der Form $(f(y), y)$ beschreiben.
D ist die offene Einheitskreisscheibe, also eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ und somit eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Jedoch ist D keine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$, denn nahe $(0,0)$ ist D weder der Graph einer Funktion von x noch einer Funktion von y.
Die Menge M, die aussieht wie eine liegende "8," ist keine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Die "Problemstelle" ist die Überkreuzung im Punkt $(0,0)$. Es ist anschaulich klar, dass es keine Umgebung U von $(0,0)$ gibt, deren Durchschnitt mit M der Graph einer stetig differenzierbaren Funktion von x oder von y ist.

Präzise Begründung: Für alle $x \in]0,1[$ gibt es zwei verschiedene Zahlen, $y_\pm(x) := \pm x\sqrt{1-x^2}$, mit $(x, y_\pm) \in M$. Da $y_\pm(x) \to 0$ für $x \to 0$, gibt es ein $\varepsilon > 0$ derart, dass $(x, y_\pm(x)) \in M \cap U$

für alle $x \in]0, \varepsilon[$. Wäre $M \cap U$ der Graph einer Funktion f von x, so dürfte es zu gegebenem x jedoch nur einen einzigen Wert y (nämlich $y = f(x)$) geben mit $(x, y) \in M \cap U$. Analog sehen wir durch Auflösen nach x^2 und dann nach x, dass $M \cap U$ nicht der Graph einer Funktion von y ist.

G 40 Kompakta mit glattem Rand

Skizziere grob die Menge $K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$. Finde ∂K und zeige, dass K ein Kompaktum mit glattem Rand ist.

K ist ein Kreisring in der Ebene:
Offensichtlich ist $\partial K = \mathbb{S}_1 \cup 2\mathbb{S}_1$ die Vereinigung des Einheitskreises und des Kreises um $(0, 0)$ mit Radius 2. Um jeden Randpunkt $p \in \partial K$ haben wir eine Funktion ψ zu finden. Ist $p \in 2\mathbb{S}_1$, so ist $U := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 > 1\}$ eine offene Umgebung von p und

$$\psi \colon U \to \mathbb{R}, \quad \psi(x, y) := x^2 + y^2 - 4$$

eine C^1-Funktion derart, dass $K \cap U = \{(x, y) \in U : \psi(x, y) \le 0\}$ und $\operatorname{grad} \psi(x, y) = (2x,\, 2y) \ne (0, 0)$ für alle $(x, y) \in U$ (also $\psi'(x, y) \ne 0$). Ist $p \in \mathbb{S}_1$, so ist $V := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 < x^2 + y^2 < 4\}$ eine offene Umgebung von p und

$$\theta \colon V \to \mathbb{R}, \quad \theta(x, y) := 1 - x^2 - y^2$$

eine C^1-Funktion derart, dass $V \cap K = \{(x, y) \in V : \theta(x, y) \le 0\}$ und $\operatorname{grad} \theta(x, y) = (-2x,\, -2y) \ne (0, 0)$ für alle $(x, y) \in V$. Also ist K tatsächlich ein Kompaktum mit glattem Rand.

G 41 Rechenaufgabe zum Greenschen Integralsatz

Wir betrachten die Kompakta mit glattem Rand $K := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \le 4\}$ und $R := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \le x_1^2 + x_2^2 \le 4\}$ in $\mathbb{R}^2$. Berechne die Integrale

$$\int_{\partial K} x_2 \, dx_1 \quad \text{und} \quad \int_{\partial R} x_2 \, dx_1 \,,$$

und zwar sowohl direkt als Wegintegral als auch durch Umschreiben in ein geeignetes zweidimensionales Integral über K bzw. R mit dem Greenschen Integralsatz.

Rechnungen für die Kreisscheibe K:

I. Direkte Berechnung des Integrals: ∂K ist die Kreislinie um 0 vom Radius 2; diese ist offensichtlich eine geschlossene C^1-Kurve. Der Weg

$$\gamma :]0, 2\pi[\to \partial K\,, \quad \gamma(t) := (2\cos t,\, 2\sin t)$$

ist eine Karte für ∂K und $\partial K \setminus \gamma(]0, 2\pi[) = \{(2, 0)\}$ eine einpunktige Menge. Weiter liegt K links von γ, denn das äußere Normalenfeld von K ist gegeben durch

$$\nu \colon \partial K \to \mathbb{R}^2\,, \quad \nu(x) = \tfrac{1}{2}\, x$$

und es ist

$$\gamma'(t) = (-2\sin t, 2\cos t)\,,$$

somit

$$\det\Big(\nu(\gamma(t)),\, \gamma'(t)\Big) = \det\begin{pmatrix} \cos t & -2\sin t \\ \sin t & 2\cos t \end{pmatrix} = 2 > 0$$

für alle $t \in \,]0, 2\pi[$. Schreiben wir $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$, so ist also

$$\begin{aligned}
\int_{\partial K} x_2\, dx_1 &= \int_0^{2\pi} \gamma_2(t)\, \gamma_1'(t)\; dt \;=\; \int_0^{2\pi} 2\sin t\,(-2\sin t)\; dt \\
&= -4 \int_0^{2\pi} \underbrace{\sin^2 t}_{\frac{1}{2}(1-\cos 2t)}\; dt \;=\; -4\pi\,.
\end{aligned}$$

II. Berechnung des Integrals mit dem Greenschen Integralsatz: Wir wenden den Greenschen Integralsatz an mit dem Vektorfeld $F = (F_1, F_2)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$F(x_1, x_2) \;:=\; (0,\; -x_2)\,.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\int_{\partial K} x_2\; dx_1 &= \int_{\partial K} F_1\, dx_2 - F_2\, dx_1 \;=\; \int_K \operatorname{div} F\; d\lambda_2 \\
&= \int_K (-1)\; d\lambda_2 \;=\; -\lambda_2(K) \;=\; -4\pi\,.
\end{aligned}$$

Rechnungen für den Kreisring $\boldsymbol{R}$:

I. Direkte Berechnung des Integrals: $\partial R = \mathbb{S}_1 \cup 2\mathbb{S}_1$ ist die disjunkte Vereinigung der Kreise um 0 vom Radius 1 bzw. 2. Beide dieser Kreise sind geschlossene C^1-Kurven. Geeignete Karten sind $\gamma\colon]0, 2\pi[\to 2\mathbb{S}_2$ wie oben sowie

$$\eta\colon]0, 2\pi[\;\to \mathbb{S}_1\,, \qquad \eta(t) \;:=\; (\cos(-t),\, \sin(-t))\,.$$

Beachten Sie das Minuszeichen hier im Vergleich zur Definition von γ ! Es ist nötig, damit R links von η liegt. Also ergibt sich für das Randintegral

$$\begin{aligned}
\int_{\partial R} x_2\, dx_1 &= \int_\gamma x_2\, dx_1 \;+\; \int_\eta x_2\; dx_1 \\
&= \int_0^{2\pi} 2\sin t\,(-2\sin t)\; dt + \int_0^{2\pi} \sin(-t)\; \sin(-t)\; dt \\
&= -4\pi \;+\; \pi \;=\; -3\pi\,.
\end{aligned}$$

II. Berechnung mit dem Greenschen Integralsatz: Mit F wie oben erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_{\partial R} x_2\; dx_1 &= \int_{\partial R} F_1\, dx_2 - F_2\, dx_1 \;=\; \int_R \operatorname{div} F\; d\lambda_2 \\
&= \int_R (-1)\; d\lambda_2 \;=\; -\lambda_2(R) \;=\; -(4\pi - \pi) \;=\; -3\pi\,.
\end{aligned}$$