Analysis II für M, HLM, Ph

13. Tutorium
Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 36 Satz von Cavalieri

Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Jordan-meßbare Menge, so daß der "Schnitt"

$$A_{x_n} = \{(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) \in A\}$$

für jedes $x_n \in \mathbb{R}$ Jordan-messbar ist.

a) Zeige:

$$|A| = \int_I |A_{x_n}| dx_n,$$

wobei I ein geeignetes Intervall ist, so daß $A \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \times I$.

b) Berechne mit Hilfe dieser Aussage das Volumen V_4 der Einheitskugel $\{x \in \mathbb{R}^4 \mid \|x\|_2 \leq 1\}$ im $\mathbb{R}^4$.

a) Die Aussage folgt direkt aus dem Satz von Fubini: Da

$$\chi_A(x_1, \ldots, x_n) = \chi_{A_{x_n}}(x_1, \ldots, x_{n-1})$$

und nach Voraussetzung sowohl χ_A als auch $\chi_{A_{x_n}}$, $x_n \in \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar sind, gilt für ein Rechteck $R = R' \times I$ mit $A \subseteq R$ daß

$$|A| = \int_R \chi_A dx = \int_I \int_{R'} \chi_{A_{x_n}}(x_1, \ldots, x_{n-1}) d(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \int_I |A_{x_n}| dx_n.$$

b) Für $B = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid \|x\|_2 \leq 1\}$ gilt

$$B_{x_4} = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1 - x_4^2\}.$$

Damit folgt $|B_{x_4}| = \frac{4}{3}\pi(1 - x_4^2)^{\frac{3}{2}}$. Also gilt

$$\begin{aligned} V_4 &= |B| \\ &= \frac{4}{3}\pi \int_{-1}^{1} (1 - x_4^2)^{\frac{3}{2}} dx_4 \\ &\overset{\text{Bronstein}}{=} \frac{4}{3}\pi \frac{1}{4}\left[x(1 - x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{x}{2}(1 - x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}\arcsin x\right]_{-1}^{1} \\ &= \frac{1}{3}\pi 3\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{2}. \end{aligned}$$

G 37 Rotationsinvarianz des Integrals

Zeige, daß das Integral rotationsinvariant ist: Sei A eine orthogonale Matrix mit $\det(A) = 1$. Zeige: für kompakte, Jordan-meßbare $Q \subset \mathbb{R}^n$ und stetige f gilt:

$$\int_{A^{-1}(Q)} f(Ax) dx = \int_Q f(y) dy.$$

Wir wollen die Substitutionsregel benutzen. Zum einen brauchen wir dafür eine stetig differenzierbare Funktion g, die wir folgendermaßen definieren: $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, g(x) = Ax$. Dann ist g als lineare Funktion zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen stetig differenzierbar mit $Dg = A$. Da $\det A = 1$, ist g invertierbar, also inbesondere g injektiv. Dann gilt

$$\int_{A^{-1}(Q)} f(Ax)dx = \int_{A^{-1}(Q)} f(g(x))|\det\, Dg(x)|dx.$$

Außerdem ist $A^{-1}(Q) = g^{-1}(Q)$ als Bild einer kompakten Jordan-meßbaren Menge unter der bijektiven stetig differenzierbaren Funktion g^{-1} ebenfalls kompakt und Jordan-meßbar. Nach der Substitutionsregel gilt dann

$$\int_{A^{-1}(Q)} f(g(x))|\det\, Dg(x)|dx = \int_{A(A^{-1}(Q))} f(y)dy = \int_Q f(y)dy.$$

G 38 Jordansche Nullmengen

Beweise folgenden Satz aus Heuser:
Sei $N \subset \mathbb{R}^p$ eine Jordansche Nullmenge und $g : N \to \mathbb{R}^q$ $(q \geq p)$ eine Lipschitz-stetige Abbildung. Dann ist $g(N)$ eine Jordansche Nullmenge in $\mathbb{R}^q$.

Heuser, Teil II, Satz 202.5.