# Analysis II für M, HLM, Ph

## 12. Tutorium
### Lösungsvorschlag

**Gruppenübung**

**G 33 Lokale Umkehrbarkeit**

Seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbare Funktion und $f'(x)$ invertierbar für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Zeige, dass $f$ offen ist, d. h. $f(U)$ ist offen für jede offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$.

*Let $y \in f(U)$ and $x \in U$ with $f(x) = y$. Since $f'(x)$ is invertible the Inverse Function Theorem yields neighbourhouds $V$ of $x$ and $W$ of $f(x) = y$ such that $f|_V : V \to W$ has a continuously differentiable inverse function $g : W \to V$ . So $f(V \cap U) = g^{-1}(V \cap U)$ is open because g is continuous. Hence, since $y \in f(V \cap U)$ there is a neighbourhood $U_y$ of $y$ with $U_y \subseteq f(V \cap U) \subseteq f(U)$. This holds for all $y \in f(U)$, so $f(U)$ is open.*

**G 34 Lipschitz-Stetigkeit**

Seien $(X, d)$ und $(Y, D)$ metrische Räume und $A \subseteq X$ und $B \subseteq Y$ Teilmengen.
Eine Funktion $f : A \to B$ erfüllt in einer Menge $M \subseteq A$ die Lipschitz-Bedingung, wenn es eine (nichtnegative) reelle Zahl $L$ gibt, mit der die Bedingung

$$\forall x_1, x_2 \in M : D(f(x_1), f(x_2)) \leq L \cdot d(x_1, x_2)$$

erfüllt ist.
Man sagt, dass $f$ Lipschitz mit Lipschitz-Konstante $L$ ist.
Zeige:

1. Jede Lipschitz-Funktion ist stetig.
2. Sei $\emptyset \neq A \subseteq X$. Für alle $x \in X$, sei $d(x, A) := \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}$. Dann ist die Funktion
$$f : X \to \mathbb{R}, \quad f(x) = d(x, A)$$
Lipschitz stetig mit Lipschitz-Konstante 1.
3. Sei $Lip := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ is Lipschitz}\}$. Zeige, dass $Lip$ ein Vektorraum ist, und dass er abgeschlossen bezüglich der Verknüpfung von Funktionen ist (d.h. $f, g \in Lip \Rightarrow g \circ f \in Lip$).
4. Zeige durch Angabe eines Gegenbeispieles, dass das Produkt von zwei Lipschitz-Funktionen im allgemein keine Lipschitz-Funktion ist.

   **Hinweis**: Zeige, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$ nicht Lipschitz ist.

1. *Let $f$ be a Lipschitz function with constant $K$. We use the $\epsilon - \delta$ definition to prove that $f$ is continuous. Let $x \in X$ and $\varepsilon > 0$, and take $\delta := \frac{\varepsilon}{K}$. Then $y \in U_\delta(x)$ (that is $d(x, y) < \delta$) implies $d(f(x), f(y)) \leq Kd(x, y) < K\delta = \varepsilon$, that is $f(y) \in U_\varepsilon(f(x))$.*
2. *Let $x, y \in X$, and $\varepsilon > 0$. Then, by the Characterization Theorem for inf, there is $a_0 \in A$ such that $d(y, a_0) \leq f(y) + \varepsilon$, so $f(y) \geq d(y, a_0) - \varepsilon$. We get then*
$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= \inf\{d(x, a) \mid x \in A\} - f(y) \leq d(x, a_0) - f(y) \leq d(x, a_0) - d(y, a_0) + \varepsilon \\ &\leq d(x, y) + \varepsilon. \end{aligned}$$
*We get similarly that $f(y) - f(x) \leq d(x, y) + \varepsilon$, so*
$$|f(x) - f(y)| \leq d(x, y) + \varepsilon.$$

*Since this is true for all $\varepsilon > 0$, it follows that*

$$|f(x) - f(y)| \leq d(x, y),$$

*hence $f$ is Lipschitz with Lipschitz constant 1.*

3. *We know that $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ is an $\mathbb{R}$-vector space. Since $Lip \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, in order to get that $Lip$ is an $\mathbb{R}$-vector space, we prove that $Lip$ is closed under addition and scalar multiplication.*

   *Let $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be Lipschitz functions with Lipschitz constants $K$, respectively $L$. Thus, for any $x, y \in \mathbb{R}$,*

   $$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|, \quad |g(x) - g(y)| \leq L|x - y|.$$

   *We get that*

   $$\begin{aligned} |(f+g)(x) - (f+g)(y)| &= |f(x) + g(x) - (f(y) + g(y))| = |f(x) - f(y) + g(x) - g(y)| \\ &\leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \leq K|x - y| + L|x - y| \\ &= (K + L)|x - y|, \end{aligned}$$

   *hence $f + g$ is Lipschitz with Lipschitz constant $K + L \geq 0$.*

   *Let $\lambda \in \mathbb{R}$. Then*

   $$|(\lambda f)(x) - (\lambda f)(y)| = |\lambda f(x) - \lambda f(y)| = |\lambda||f(x) - f(y)| \leq |\lambda| K|x - y|,$$

   *thus $\lambda f$ is Lipschitz with Lipschitz constant $|\lambda|K \geq 0$.*

   *Thus, we have proved that $Lip$ is an $\mathbb{R}$-vector space.*

   *Let us prove now that $Lip$ is closed under composition of functions.*

   $$|(g \circ f)(x) - (g \circ f)(y)| = |g(f(x)) - g(f(y))| \leq L|f(x) - f(y)| \leq LK|x - y|,$$

   *so $g \circ f$ is Lipschitz with Lipschitz constant $LK \geq 0$.*

4. *Let $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = x$. Then it is obvious that $g$ is Lipschitz with Lipschitz constant 1. We shall prove that $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = g(x) \cdot g(x) = x^2$ is not Lipschitz. We assume by contradiction that $f$ is Lipschitz, so there is $K \geq 0$ such that for all $x, y \in \mathbb{R}$,*

   $$K|x - y| \geq |f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x + y||x - y|.$$

   *We get that for all $x \neq y$,*

   $$K \geq |x + y|.$$

   *Take $x = 0$ and $y = K + 1$ to get a contradiction.*

□

**G 35 Fixpunktsatz**

Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum. Sei eine Funktion $f : X \to X$ gegeben, die die Ungleichung

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y) \quad \text{für alle } x, y \in X, x \neq y \tag{1}$$

erfüllt.

Zeige, dass falls $X$ kompakt ist, die Funktion $f : X \to X$ einen Fixpunkt hat.

**Hinweis**: Zeige, dass die Funktion $h : X \to \mathbb{R}, h(x) = d(x, f(x))$ stetig ist und verwende, dass jede stetige Funktion auf einem kompakten metrischen Raum das Minimum und das Maximum besitzt.

*Let us consider the function* $h : X \to \mathbb{R}, h(x) = d(x, f(x))$. *Let us prove that* $h$ *is continuous. First, let us remark that for all* $x, y \in X$

$$\begin{aligned} h(x) - h(y) &= d(x, f(x)) - d(y, f(y)) \leq d(x, y) + d(y, f(x)) - d(y, f(y)) \\ &\leq d(x, y) + d(f(x), f(y)), \end{aligned}$$

*and similarly that* $h(y) - h(x) \leq d(x, y) + d(f(x), f(y))$. *Thus,*

$$|h(x) - h(y)| \leq d(x, y) + d(f(x), f(y)).$$

*Let now* $x \in X$ *arbitrary and* $\varepsilon > 0$. *Since* $f$ *is continuous at* $x$, *there is* $\delta_1 > 0$ *such that* $d(x, y) < \delta_1$ *implies* $d(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$. *Take* $\delta := \min\left(\delta_1, \frac{\varepsilon}{2}\right)$. *Then* $d(x, y) < \delta$ *implies* $d(x, y) < \frac{\varepsilon}{2}$ and $d(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$, so $|h(x) - h(y)| < \varepsilon$.
*Then* $h$ *is continuous on the compact metric space* $X$, *so by Theorem 159.3(Heuser, Teil 2) it attains its minimum; that is, there is* $x_0 \in X$ *such that* $h(x) \geq h(x_0)$ *for all* $x \in X$. *We claim that* $f(x_0) = x_0$. *If not, then using the inequality for* $f$, *we have*

$$h(f(x_0)) = d(f(x_0), f(f(x_0))) < d(x_0, f(x_0)) = h(x_0),$$

*contradicting the fact that* $h(x_0)$ *is the minimum of* $h$. *Hence,* $x_0$ *is a fixed point of* $f$.
*It remains to prove that* $x_0$ *is the only fixed point of* $f$. *Assuming that* $x_1 \in X$ *is a fixed point of* $f$ *distinct from* $x_0$, *we get*

$$d(x_0, x_1) = d(f(x_0), f(x_1)) < d(x_0, x_1),$$

*which is a contradiction.* □