Analysis II für M, HLM, Ph

11. Tutorium

Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 30 Taylorformel

Berechne näherungsweise $1,05^{1,02}$ mit Hilfe des Taylorpolynoms 2. Grades einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Das Restglied braucht nicht bestimmt zu werden.

$f(x, y) = x^y$.

G 31 Eine Verallgemeinerung des Banachschen Fixpunktsatzes

Sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung, so dass für ein festes $m \in \mathbb{N}$ ein q mit $0 < q < 1$ existiert, so dass

$$\|T^m x - T^m y\| \leq q\|x - y\| \text{ für alle } x, y \in X$$

gilt. Zeige

1. Es gibt einen eindeutig bestimmten Fixpunkt $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ von T, das heißt $T(\bar{x}) = \bar{x}$.
2. Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $T^k(x) \xrightarrow{k \to \infty} \bar{x}$.

Hinweis: Der herkömmliche Banachsche Fixpunktsatz (Beh. für $m = 1$) kann verwendet werden.
Gilt für jede Abbildung $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, dass aus $g^m(\bar{x}) = \bar{x}$ folgt $g(\bar{x}) = \bar{x}$?

Applying the Banach Fixed Point Theorem, T^m has a unique fixed point x. However,

$$T^m(T(x)) = T^{m+1}(x) = T(T^m(x)) = T(x),$$

so $T(x)$ is also a fixed point of T^m. Since the fixed point of T^m is unique, we must have $T(x) = x$, so x is a fixed point of T. Let us prove now that it is unique. If $y \in X$ is such that $T(y) = y$, then $T^m(y) = y$, so (by uniqueness of fixed points of T^m) $y = x$.

Natürlich ist die Antwort auf die Frage nein. Denn sei $g(x) = -x$. Dann hat g nur 0 als Fixpunkt und für g^2 sind 0 und 1 Fixpunkte.