Analysis II für M, HLM, Ph

10. Tutorium

Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 28 Mittelwertsatz für Funktionen mehrerer Veränderlicher

Im Satz 5, Forster Kapitel 6, wird der Mittelwertsatz für Funktionen mehrerer Veränderlicher formuliert. Dabei wird es notwendig, Integrale über matrixwertigen Funktionen einzuführen. Um erstmal ein Gefühl für die Sache zu bekommen, betrachten wir ein Beispiel

a) Gegeben sei die Funktion $p :]a, b[\to \mathbb{R}^2$ mit $p(t) := (t^2, t^3)$. Überlege Dir an diesem Beispiel, wo es Probleme mit der direkten Übertragung des Mittelwertsatzes für Funktionen in einer Veränderlichen gibt.

b) Wende auf die Kurve p Satz 5 aus dem Forster an.

c) Beweise Satz 5 aus dem Forster. Probiere es zunächst selbst! Dokumentiere jeweils die Beweisschritte und die Beweisideen.

a) *Anschaulich sagt der MWS für Funktionen einer Veränderlichen, daß es im Intervall $]x, x + \xi[$ eine Stelle $x_0 = x + \theta\xi$ gibt (also mit $0 < \theta < 1$), an der die Steigung der Tangenten gleich der Steigung der Sekanten durch $f(x)$ und $f(x + \xi)$ ist. Dies geht für Funktionen in höherdimensionalen Räumen schief. Als Beispiel betrachten wir die in der Aufgabenstellung angegebene Funktion p und zeigen, daß es kein passendes $\theta \in]0, 1[$ geben kann (obwohl p differenzierbar ist): Wir nehmen $x = 0, \xi = 1$ und finden*

$$\begin{aligned} & p(x+\xi) - p(x) = p'(x + \theta\xi) \cdot \xi \\ \iff \quad & (1, 1) = (2\theta, 3\theta^2) \end{aligned}$$

Ein solches θ kann es jedoch nicht geben.

b) *Die Kurve $p(t) = (t, t^2)$ ist stetig differenzierbar, also ist Satz 5 anwendbar. Nach Satz 5 gilt dann:*

$$\begin{aligned} & p(x+\xi) - p(x) = \left(\int_0^1 Dp(x + t\xi) dt\right)\xi \\ \iff \quad & \begin{pmatrix} x+\xi \\ (x+\xi)^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix} = \left(\int_0^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2(x+t\xi) \end{pmatrix} dt\right) \cdot \xi \\ \iff \quad & \begin{pmatrix} \xi \\ 2x\xi + \xi^2 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} t \\ 2xt + t^2\xi \end{pmatrix}\right]_0^1 \cdot \xi \\ \iff \quad & \begin{pmatrix} \xi \\ 2x\xi + \xi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2x + \xi \end{pmatrix} \cdot \xi. \qquad \checkmark \end{aligned}$$

c) *Der Beweis steht im Forster. Idee: Betrachte $g_i(t) = f_i(x + t\xi)$, wende dann beim Einsetzen die Kettenregel an.*

G 29 Konvexe Funktionen und Niveaumenge

1. Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe, monoton wachsende Funktion ($x \leq y \Rightarrow g(x) \leq g(y)$). Sei $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge und $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion.

   Zeige, dass $h : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ definiert durch $h(x) = g(f(x))$ auch konvex ist.

   Finde ein Beispiel, das die Notwendigkeit der Voraussetzung, dass g monoton wachsend ist, zeigt.

2. Die (untere) Niveaumenge einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zum Niveau β ist definiert durch
$$\mathcal{L}(f, \beta) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq \beta\}.$$
Beweise: f ist konvex. $\Rightarrow \mathcal{L}(f, \beta)$ ist konvex für jedes $\beta \in \mathbb{R}$.
Gilt auch die Umkehrung?
3. Beweise: Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion, $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge. Dann ist $\operatorname{argmin}(\mathrm{f}, \mathcal{C})$ d.h. die Menge der Punkte, wo f ihr Minimum über $\mathcal{C}$ annimmt, konvex.

1. *Seien $x, y \in \mathcal{M}$ und $\lambda \in [0, 1]$*
$$\begin{aligned} h(\lambda x + (1-\lambda)y) &= g(f(\lambda x + (1-\lambda)y)) \\ &\leq g(\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)) \\ &\leq \lambda g(f(x)) + (1-\lambda)g(f(y)) = \lambda h(x) + (1-\lambda)h(y). \end{aligned}$$
Die erste Ungleichung folgt aus der Voraussetzung, dass g monoton wachsend und f konvex ist. Die zweite Ungleichung folgt aus der Konvexität von g.
Folgendes Beispiel zeigt, dass auf die Voraussetzung, dass g monoton wachsend ist, nicht verzichtet werden kann:
Sei $g(x) = e^{-x}$, $f(x) = x^2$ und $\mathcal{M} = \mathbb{R}$, dann ist $h(x) = e^{-x^2}$. Für die zweiten Ableitungen gilt:
$$\begin{aligned} &g''(x) = e^{-x} > 0, \\ &f''(x) = 2 > 0 \\ &h''(x) = \left(-2xe^{-x^2}\right)' = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = (4x^2 - 2)e^{-x^2} \end{aligned}$$
Folglich sind g und f konvex, aber h nicht, da zum Beispiel $h''(0) = -2 < 0$.
2. *Seien $x, y \in \mathcal{L}(f, \beta)$ und $\lambda \in [0, 1]$. Da f konvex ist, haben wir:*
$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \leq \lambda\beta + (1-\lambda)\beta = \beta.$$
Daher gilt $\lambda x + (1-\lambda)y \in \mathcal{L}(f, \beta)$.
Die Umkehrung gilt nicht, denn für $f : (0, \infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto \ln x$ gilt
$$\mathcal{L}(f, \beta) = [e^{\beta}, \infty).$$
Folglich ist $\mathcal{L}(f, \beta)$ konvex für alle $\beta \in \mathbb{R}$, aber f ist nicht konvex, da $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$.
3. *Es gilt nach Definition $x \in \operatorname{argmin}(\mathrm{f}, \mathcal{C}) \Leftrightarrow f(x) \leq f(z)$ gilt für alle $z \in \mathcal{C}$. Seien $x, y \in \operatorname{argmin}(\mathrm{f}, \mathcal{C})$ und $\lambda \in [0, 1]$. Da f konvex ist, gilt*
$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \leq \lambda f(z) + (1-\lambda)f(z) = f(z)$$
für alle $z \in \mathcal{C}$. Daher gilt $\lambda x + (1-\lambda)y \in \operatorname{argmin}(\mathrm{f}, \mathcal{C})$ und folglich ist $\operatorname{argmin}(f, \mathcal{C})$ konvex.