Technische Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik

Prof. B. Kümmerer, WS 08/09

Funktionalanalysis 9. Übungsblatt 18. 12. 2008

ANWESENHEITSÜBUNGEN

Aufgabe A1: (Fouriertransformation)
Gegeben sei die 2π-periodische Funktion s mit

$$s(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0, \\ \frac{1}{2}(\pi - x) & \text{für } x \in (0, 2\pi). \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie: Die (reelle) Fourierreihe $\tilde{s}$ von s ist

$$\tilde{s}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}.$$

(b) Gegeben sei die Funktion S mit $S(x) = \int_0^x s(t)\,dt$. Weisen Sie mittels partieller Integration nach, dass man die Fourierreihe $\tilde{S}$ von S durch gliedweise Integration von $\tilde{s}$ erhält.

(c) Zeigen Sie mit Aufgabenteil (a) und (b):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}\,.$$

Aufgabe A2: (Bairescher Kategoriensatz)
Sei X ein unendlich dimensionaler normierter Raum und sei $Y \subset X$ ein endlich dimensionaler Teilraum von X.

(a) Zeigen Sie, dass Y abgeschlossen in X ist und keinen inneren Punkt enthält.

(b) Sei X der lineare Raum aller Folgen mit nur endlich vielen Gliedern ungleich 0. Zeigen Sie, dass $(X, \|\cdot\|)$ kein vollständiger Raum ist.

(c) Sei $\mathcal{P}([0,1])$ der Vektorraum aller Polynome auf $[0,1]$. Zeigen Sie, dass es auf $\mathcal{P}([0,1])$ keine Norm geben kann, die diesen Raum zu einem Banachraum macht.

Aufgabe A3: (Banach Steinhaus) Können Sie den Satz von Banach-Steinhaus auch auf Netze verallgemeinern? Wie muss er dann formuliert werden?

Aufgabe A4: (Satz von Szegö)
Um das Intergral $\int_0^1 f(t)\,dt$ für eine stetige Funktion f angenähert zu berechnen, bedient man sich häufig Näherungsformeln der Gestalt

$$Q_n(f) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i^{(n)} f(t_i^{(n)}),$$

wobei $t_0^{(n)}, \ldots, t_n^{(n)} \in [0,1]$ und $\alpha_0^{(n)}, \ldots, \alpha_n^{(n)} \in \mathbb{R}$ sind. Man fragt sich nun, ob $(Q_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\int_0^1 f(t)\,dt$ konvergiert. Aufschluss darüber liefert der folgende Satz von Szegö.
Sei Q_n wie oben. Dann sind äquivalent:

(i) $(Q_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert gegen* $\int_0^1 f(t)\,dt$ *für alle* $f \in \mathcal{C}([0,1])$.

(ii) $(Q_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert gegen* $\int_0^1 f(t)\,dt$ *für alle Polynome und* $\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \sum_{i=0}^{n} |\alpha_i^{(n)}| < \infty$.

Beweisen Sir diesen Satz. (Hinweis: Was ist $||Q_n||$?)
Bemerkung: Für die Trapezregel gilt beispielsweise

$$Q_n(f) = \frac{1}{n}\left(\frac{f(t_0)}{2} + f(t_1) + \ldots + f(t_{n-1}) + \frac{f(t_n)}{2}\right)$$

mit $t_i = \frac{i}{n}$. Man kann zeigen, dass $(Q_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\int_0^1 f(t)\,dt$ konvergiert für alle $f \in \mathcal{C}^2([0,1])$, also insbesondere für Polynome und somit auch für alle stetigen Funktionen.

HAUSÜBUNGEN

Aufgabe H1: (Poisson-Kern und Dirichlet-Problem)
Für $0 \le r < 1$ definiert man den Poisson-Kern

$$P_r(t) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} e^{int} .$$

(a) Zeigen Sie: Ist $z = re^{it}$, dann gilt

$$P_r(t) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2} = \operatorname{Re} \frac{1+z}{1-z} .$$

(b) Zeigen Sie: Setzt man $P_n(t) := P_r(t)$ für $r := 1 - \frac{1}{n}$, dann ist $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine approximierende Eins, d.h., es gilt

(i) $P_n(t) \ge 0$,

(ii) $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_n(t)\,dt = 1$,

(iii) Für jedes $\delta > 0$ konvergiert die Einschränkung von $P_n(t)$ auf das Intervall $[\delta, 2\pi - \delta]$ gleichmäßig gegen Null, für $n \to \infty$.

Also konvergiert $(f * P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[0, 2\pi]$ gleichmäßig gegen f für $f \in \mathcal{C}_{\text{period.}}([0, 2\pi])$.

(c) Zeigen Sie: Sei f stetig (und reell) auf dem Einheitskreis $\mathbb{T}$ in der komplexen Ebene, und sei $\tilde{f}$ auf der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe D definiert durch $\tilde{f}(e^{it}) := f(e^{it})$ und $\tilde{f}(re^{it}) := (P_r * f)(t)$ für $0 \le r < 1$, dann ist $\tilde{f}$ stetig auf der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe, und im Inneren ist $\Delta\tilde{f} = 0$, d.h., $\tilde{f}$ löst das Dirichletproblem für die Randverteilung f.
Hinweis: 1. Bei der Definition der Faltung wird der Einheitskreis mit dem Intervall $[0, 2\pi)$ identifiziert. 2. Der Übergang zu Polarkoordinaten kann viel Arbeit sparen (wie lautet Δ in Polarkoordinaten?).

(d) Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $D \subset U$. Ferner sei f eine holomorphe Funktion auf U. Zeigen Sie mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel, daß für alle $z = re^{it}$, $0 \le r < 1$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(t-s) f(e^{it})\,dt \quad \text{ist.}$$

Hinweis: 1.) Entwickeln Sie den Nenner des Integranden der Cauchyschen Integralformel in eine Potenzreihe. 2.) Zeigen Sie: $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{is})e^{ins}\,ds = 0$ für $n = 1, 2, \dots$.

Aufgabe H2: (Was die $e_n(x) = e^{inx}$, $n \in \mathbb{Z}$, noch alles können)

(a) Mit der Multiplikation $e^{i\varphi} \cdot e^{i\psi} = e^{i(\varphi+\psi)}$ ist der Einheitskreis $\mathbb{T}$ der komplexen Ebene eine Gruppe. Ein Charakter auf einer (lokalkompakten) Gruppe $(G, \circ)$ ist eine stetige Funktion $f : G \to \mathbb{T}$, die zudem ein Gruppen-Homomorphismus ist, d. h.
$f(g_1 \circ g_2) = f(g_1) \cdot f(g_2)$, $g_1, g_2 \in G$. Berechnen Sie alle Charaktere auf der Gruppe $\mathbb{T}$ (das sind also insbesondere stetige Funktionen von $\mathbb{T}$ nach $\mathbb{T}$).

(b) Berechnen Sie alle $\| \cdot \|_2$-stetigen lineare Funktionale ϕ auf $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ die multiplikativ sind bezüglich der Faltung, d. h. $\phi(f * g) = \phi(f) \cdot \phi(g)$, $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$.

(c) Berechnen Sie alle abgeschlossenen, insbesondere eindimensionalen, linearen Teilräume von $L^2(\mathbb{T})$, die unter allen Rotationen $f \mapsto T_\tau(f)$ mit $T_\tau(f)(e^{i\varphi}) := f(e^{i(\varphi-\tau)})$ global invariant sind (d. h. der Teilraum wird in sich abgebildet, es muss aber nicht jedes einzelne Element invariant sein).

(d) Korollar: Wie sehen die linearen Operatoren in $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{T}))$ aus, die mit allen Rotationen kommutieren?

(e) Berechnen Sie alle Eigenfunktionen der zweiten Ableitung $D^2 := \frac{d^2}{dx^2}$ auf den zweimal stetig differenzierbaren Funktionen in $\mathcal{C}_{\text{period.}}([0, 2\pi])$ („Eigenfunktion“ heißt auch hier: $D^2 f = \lambda f$ für geeignetes $\lambda \in \mathcal{C}$, $f \neq 0$). Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Korollar d).
Hinweis: Universalwerkzeug für diese Aufgabe ist der Satz 7.11 der Vorlesung.

Wir wünschen Ihnen frohe Weihnachten und ein gutes und erfolgreiches Jahr 2009!