Technische Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Prof. B. Kümmerer, WS 08/09

Funktionalanalysis 8. Übungsblatt 11. 12. 2008

ANWESENHEITSÜBUNGEN

Aufgaben A1: (C*-Algebra der stetigen Funktionen)
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen.

(a) Machen Sie sich kurz klar, dass $(\mathcal{C}(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$ mit der punktweisen Multiplikation eine C*-Algebra ist.

(b) Wie sehen orthogonale Projektionen, positive Elemente, selbstadjungierte Elemente, normale Elemente, Isometrien, Koisometrien, unitäre Elemente und partielle Isometrien in $(\mathcal{C}(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$ aus? Hierbei seien diese Klassen von Elementen definiert wie in der algebraischen Charakterisierung der entsprechenden Operatoren auf einem Hilbertraum (vgl. 5.9 der Vorlesung).

(c) Wie muss Ω beschaffen sein, damit $\Omega \ni t \mapsto 1$ und $\Omega \ni t \mapsto 0$ nicht die einzigen orthogonalen Projektionen sind?

Aufgabe A2: (Separabilität)
Wie in der Vorlesung heißt ein Banachraum *separabel* wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt.

a) Zeigen Sie: $l^\infty(\mathbb{N})$ ist nicht separabel. (Hinweis: Finden Sie eine überabzählbare Teilmenge in der Einheitskugel, deren Elemente voneinander große Abstände haben).

b) Zeigen Sie: Ist E Banachraum und $H \subseteq E$ ein abgeschlossener Teilraum, dann ist E genau dann separabel, wenn E/H und H separabel sind.

Aufgabe A3: (Basis von $l^2(\mathbb{N})$)
Zeigen Sie: Jede Basis (nicht Orthonormalbasis) eines unendlich-dimensionalen separablen Hilbertraumes ist überabzählbar. Hinweis: Zeigen Sie: Existiert eine abzählbare Basis, so existiert auch eine abzählbare Basis, die gleichzeitig ein Orthonormalsystem ist.

Aufgabe A4:(Hilbertraum der fastperiodischen Funktionen)
Sei $\mathcal{F}$ die lineare Hülle der Funktionen $\mathbb{R} \ni x \mapsto e^{i\omega x}, \omega \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie:

$$\langle f, g\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x)\overline{g(x)}\, dx$$

definiert ein Skalarprodukt auf $\mathcal{F}$, d.h., $\mathcal{F}$ ist ein Prä-Hilbertraum.

(b) Sei $\mathcal{H}$ die Vervollständigung von $\mathcal{F}$. Finden Sie eine ONB für $\mathcal{H}$ und berechnen Sie seine Dimension, indem Sie einen Isomorphismus zu einem geeigneten $l^2(I)$ angeben (I=Indexmenge). Ist $\mathcal{H}$ separabel?
$\mathcal{H}$ heißt *Hilbertraum der fastperiodischen Funktionen.*

Bemerkung: Man kann $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ ($\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ steht für die gleichmäßig beschränkten stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$) auch in der Supremumsnorm abschließen. Dann erhält man die sogenannten *fastperiodischen Funktionen.* Sie wurden von Harald Bohr, den Bruder des Physikers und Nobelpreisträgers Nils Bohr in die Mathematik eingeführt.

Aufgaben A5: (Faltung)

(a) Zeigen Sie, dass für Funktionen $f, g \in L^1([0, 2\pi], \frac{\lambda}{2\pi})$ die Ungleichung

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1 \quad \text{gilt.}$$

(λ=Lebesgue-Maß)

(b) Zeigen Sie: Für $f, g \in L^2([0, 2\pi], \frac{\lambda}{2\pi})$ ist $f * g$ stetig (Hinweis: Wir sieht die Fouriertransformierte von $f * g$ aus?).

HAUSÜBUNGEN

Aufgaben H1: (Positiv und positiv definit)
Sei $f \in L^2([0, 2\pi])$. Zeigen Sie, dass folgende Bedingungen äquivalent sind:

a) $f \geq 0$ fast überall.

b) Die Folge $(\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ der Fourierkoeffizienten von f ist positiv definit (vgl. Aufgabe H2 auf Blatt 4).

Hinweis: Interpretieren Sie das nach Aufgabe H2 auf Blatt 4 zu dieser positiv definiten Funktion gehörige Skalarprodukt.

Aufgabe H2: (Rademacher- und Walsh-Funktionen)
Gegeben seien die Abbildungen

$$\Phi : [0, 1) \to [0, 1)\,,\ x \mapsto 2x \bmod 1 \quad \text{und} \quad f : [0, 1) \to \mathbb{R}\,,\ f(y) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq y < \frac{1}{2}, \\ -1 & \text{für } \frac{1}{2} \leq y < 1. \end{cases}$$

Sei $f_n : [0, 1) \to \mathbb{R}\,,\ f_n(x) := (f \circ \Phi^n)(x)$, $n \in \mathbb{N}_0$.

(a) Wie sehen die Funktionen f_n aus? Finden Sie eine explizite Darstellung für diese Funktionen und skizzieren Sie sie (*Rademacher-Funktionen*).

(b) Zeigen sie, dass $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ ein Orthonormalsystem in $L^2([0, 1))$ ist.

(c) Ergänzen $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ zu einer ONB von $L^2([0, 1))$.
Hinweis: Welche Funktionen lassen sich durch Produkte aus den ersten n Rademacher-Funktionen gewinnen?
Die Funktionen der ONB, die Sie wahrscheinlich konstruiert haben, heißen auch *Walsh-Funktionen*.

Aufgaben H3: (Polardarstellung, ein Nachtrag)
Seien $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ Hilberträume.

(a) Zeigen Sie: Für $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ existiert eine (eindeutige) partielle Isometrie $V \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, so dass

$$A = V|A| \quad \text{und} \quad \ker A = \ker V \text{ ist,}$$

wobei $|A| := (A^*A)^{1/2}$ die Wurzel des positiven Elements $A^*A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ist, d. h., $|A|^2 = A^*A$ (Für unendlich-dimensionale Hilerträume können Sie die Existenz von $|A|$ annehmen; wie sehen Sie die Existenz im endlich-dimensionalen Fall?).

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(i) Zeigen Sie: Für alle $x \in \mathcal{H}$ ist $\|\,|A|x\,\|_{\mathcal{H}} = \|Ax\|_{\mathcal{K}}$.
Sei $|A|\mathcal{H} := \{|A|x : x \in \mathcal{H}\} \subseteq \mathcal{H}$. Betrachten Sie die Abbildung
$V_0 : |A|\mathcal{H} \to \mathcal{K}\,,\ |A|x \mapsto Ax$.
Zeigen Sie, dass V_0 eine wohldefinierte lineare Abbildung ist.

(ii) „Ergänzen Sie“ V_0 zu einer partiellen Isometrie $V \in \mathcal{L}(\mathcal{H}; \mathcal{K})$.

(iii) Zeigen Sie: V ist die gewünschte partielle Isometrie (sie ist auch durch die obigen Bedingungen eindeutig festgelegt).

(b) Weisen sie nach, dass $V^* A = |A|$ ist.

(c) Aus einem Numerik Buch.
Zu jeder (reellen) $m \times n$-Matrix A existieren orthogonale Matrizen U und V, so dass

$$U^t A V = diag\,(s_1, s_2, \ldots) = S.$$

Die sogenannten singulären Werte $s_1 \geq s_2 \geq \ldots \geq s_l > s_{l+1} = s_{l+2} = \ldots = 0$ sind die Wurzeln der Eigenwerte von $A^t A$, l ist der Rang der Matrix A und die Spalten von U bzw. V sind Eigenvektoren von AA^t bzw $A^t A$.

Was hat diese „Singulärwertzerlegung“ mit der Polardarstellung zu tun?