Technische Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Prof. B. Kümmerer, WS 08/09

Funktionalanalysis 7. Übungsblatt 04. 12. 2008

ANWESENHEITSÜBUNGEN

Aufgabe A1: (Ausgleichsrechnung)
Seien $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ Hilbertäume, $A : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ lineare beschränkte Abbildung, und sei $b \in \mathcal{K}$ ein vorgegebener Vektor. Zeigen Sie:
Für $x \in \mathcal{H}$ sind äquivalent:

a) $||Ax - b||$ ist minimal, d.h., $||Ax - b|| \leq ||Az - b||$ für $z \in \mathcal{H}$.

b) Es ist $A^*Ax = A^*b$.

Warum existiert ein solches x?

Aufgabe A2: (Adjungierte)
Sei $S : l^2(\mathbb{N}) \to l^2(\mathbb{N})$ der Rechtsshift, d.h.,

$$(Sf)(n) := \begin{cases} 0 & n = 0 \\ f(n-1) \quad , & n \geq 1 \end{cases} .$$

Berechnen Sie S^*.

Aufgaben A3: (Operatormatrizen)
Sei $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_n$ ein Hilbertraum und für $i = 1, \ldots, n$ sei P_i die orthogonale Projektion von $\mathcal{H}$ auf $\mathcal{H}_i$. Für $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ sei $T_{i,j} := P_i T P_j$, und wir bilden die zugehörige $n \times n$ „Operatormatrix“ mit dem Operator $T_{i,j}$ an der j-ten Stelle der i-ten Zeile.

(a) Berechnen Sie die Operatormatrix von T^* und von $S \cdot T$ aus den Operatormatrizen von S und T.

(b) Wie sieht die Operatormatrix aus, wenn T selbstadjungiert, bzw. unitär, bzw. $T = P_1$, bzw. T eine partielle Isometrie mit $T^*T = P_1$ ist?

Aufgabe A4: (Positiv ist nicht gleich positiv)
Finden Sie Beispiele von Matrizen A und B, so dass A nicht-negative Einträge hat, A aber trotzdem nicht positiv semidefinit ist, während B positiv semidefinit ist, aber trotzdem nicht nur nicht-negative Einträge hat.

Aufgaben A5: (Netzkonvergenz) Sei J eine beliebige Menge, $(x_j)_{j \in J} \subseteq \mathbb{C}$, so dass $\sum_{j \in J} x_j$ konvergiert. Zeigen Sie

a) $M := \{j \in J : x_j \neq 0\}$ ist höchstens abzählbar.
(Hinweis: Für wie viele $j \in J$ kann $|x_j| > \varepsilon > 0$ sein?)

b) Ist $J = \mathbb{N}$, so ist $\sum_{j \in J} x_j$ genau dann konvergent im Sinn von 6.2, wenn $\sum_{j \in \mathbb{N}} x_j$ absolut konvergiert.

HAUSÜBUNGEN

Aufgabe H1: (Hardyraum: Hilberträume können auch anders aussehen)
Sei D die offene Einheitskreisscheibe der komplexen Ebene und $\mathcal{H}(D)$ der Vektorraum der auf D holomorphen Funktionen.

(a) Zeigen Sie: Für jedes $0 < r < 1$ ist $\|f\|_r := \left(\int_0^{2\pi} |f(r \cdot e^{it})|^2 \, dt\right)^{1/2}$ eine Norm auf $\mathcal{H}(D)$, die diesen Raum zu einem Prä-Hilbertraum macht.
(Hinweis: Verwenden Sie den Identitätssatz für holomorphe Funktionen.)

(b) Zeigen Sie, dass für jedes $0 < r < 1$ die Funktionen $\{z \mapsto z^n \; : \; n \in \mathbb{N}_0\}$ total in diesem Prä-Hilbertraum sind.

(c) Berechnen Sie aus (b) eine ONB für diesen Prä-Hilbertraum.

(d) Berechnen Sie $\|f\|_r$ für $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{H}(D)$.

(e) Zeigen Sie: Für $0 < r < r' < 1$ ist $\|f\|_r \leq \|f\|_{r'}$.

(f) Sei $\mathcal{H}_2(D) := \{f \in \mathcal{H}(D) \; : \; \|f\|_2 := \sup\limits_{0<r<1} \|f\|_r < \infty\}$. Weisen Sie nach, dass f mit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ genau dann ein Element von $\mathcal{H}_2(D)$ ist, wenn $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$ ist. Zeigen Sie ferner, dass $\mathcal{H}_2(D)$ ein Hilbertraum ist.

(g) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\delta_{z_0} : \mathcal{H}_2(D) \to \mathbb{C}\,,\; f \mapsto f(z_0)$ für jedes $z_0 \in D$ ein beschränktes lineares Funktional auf $\mathcal{H}_2(D)$ ist. Nach dem Satz von Riesz-Fréchet existiert daher ein $g \in \mathcal{H}_2(D)$ mit $\delta_{z_0}(f) = \langle f, g \rangle_{\mathcal{H}_2(D)}$ für alle $f \in \mathcal{H}_2(D)$. Bestimmen Sie g.