Funktionalanalysis 6. Übungsblatt 26. 11. 2008

ANWESENHEITSÜBUNGEN

Aufgabe A5: (Die Idee der schwachen Ableitung)
Sei $\mathcal{D} := \{f \in \mathcal{C}^1([-1,1]) : f(-1) = 0 = f(1)\} \subseteq L^2([-1,1])$.

i) Zeigen Sie: Für $f \in \mathcal{C}^1([-1,1])$ gilt $< f', \varphi > = \; - < f, \varphi' >$ für alle $\varphi \in \mathcal{D}$.

ii) Zeigen Sie: Ist $L^2([-1,1]) \supseteq \mathcal{D} \ni \varphi \mapsto - < f, \varphi' >$ stetig, dann existiert genau ein $g \in L^2([-1,1])$ mit $< g, \varphi > = \; - < f, \varphi' >$ für alle $\varphi \in \mathcal{D}$. g heißt *schwache Ableitung* von f.

iii) Bestimmen Sie die schwache Ableitung von $f(x) := |x|$.

Aufgabe A2: (Zu Lax-Milgram)
Sei $(E, \|\cdot\|_1)$ ein Banachraum, $(F, \|\cdot\|_2)$ ein normierter Raum und A eine stetige lineare Abbildung $A : E \to F$. Ferner gebe es eine Konstante $c > 0$, sodass $\|Ax\|_2 \geq c\|x\|_1$ ist für alle $x \in E$.
Zeigen Sie, dass A injektiv ist und dass das Bild $\operatorname{Im} A$ von A abgeschlossen ist.

Aufgabe A3: (Lax Milgram)
Sei $\mathcal{H}$ Hilbertraum, $B : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{K}$ eine beschränkte koerzitive Sesquilinearform und $\varphi : \mathcal{H} \to \mathbb{K}$ ein stetiges lineares Funktional. Zeigen Sie: Es existiert $z \in \mathcal{H}$ mit $\varphi(x) = \overline{B(z,x)}$ für alle $x \in \mathcal{H}$.

Aufgabe A4: (Rang-1-Operatoren)

(a) Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $x, y \in \mathcal{H}$ und $T_{x,y}$ der Operator $\mathcal{H} \ni z \mapsto \langle z, x\rangle y \in \mathcal{H}$. Berechnen Sie die Adjungierte dieses Operators.

b) Für welche Wahlen von $x, y \in \mathcal{H}$ ist $T_{x,y}$ positiv, hermitesch, orthogonale Projektion, partielle Isometrie?

(c) (i) Sei $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit $\dim \operatorname{Im} T = 1$. Zeigen Sie: Es existieren $x, y \in \mathcal{H}$ mit $T = T_{x,y}$.

ii) Sei nun $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit $\dim \operatorname{Im} T < \infty$. Zeigen Sie, dass $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n \in \mathcal{H}$ existieren mit $T = \sum_{i=1}^n T_{x_i, y_i}$.

Anmerkung: $T_{x,y}$ bezeichnet man auch als Rang-1-Operator. In der Quantenmechanik schreibt man dafür $|y\rangle\langle x|$.

Aufgabe A5: (Adjungierte)
Sei $\mathcal{H} = L^2([0,1])$, $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}$ stetig, $(T_K(f)(x) := \int_0^1 K(x,y) f(y) dy$.
Zeigen Sie: Ist $K^*(x,y) := \overline{K(y,x)}$, dann ist $(T_K)^* = T_{K^*}$.

HAUSÜBUNGEN

Aufgabe H1: (Die große Projektionsaufgabe)

(a) Sei $\mathcal{H}$ der Hilbertraum $L^2([-1,1])$. Wir definieren die lineare Abbildung

$$U : \mathcal{H} \to \mathcal{H},\ (Uf)(t) = f(-t).$$

Sei $\mathcal{F}$ der abgeschlossene lineare Teilraum $\mathcal{F} := \{f \in \mathcal{H} \ : \ U(f) = f\}$.

Zeigen Sie, dass U unitär ist, bestimmen Sie den Raum $\mathcal{F}^\perp$ und drücken Sie die orthogonalen Projektionen $P_\mathcal{F}$ und $P_{\mathcal{F}^\perp}$ von $\mathcal{H}$ auf $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}^\perp$ mit Hilfe von U aus.

Hinweis: Untersuchen Sie $f - P_\mathcal{F} f$ und $U(f - P_\mathcal{F} f)$, sowie deren Summe.

(b) Sei $\mathcal{H}$ der Hilbertraum $L^2(\mathbb{R}^n)$. Ferner sei S_n die Gruppe der Permutationen von n Elementen. Für $\sigma \in S_n$ definieren wir den unitären Operator

$$(U_\sigma f)(t_1, \ldots, t_n) = f(t_{\sigma(1)}, \ldots, t_{\sigma(n)}).$$

Ferner sei $\mathcal{F} := \{f \in \mathcal{H} \ : \ U_\sigma f = f \text{ für alle } \sigma \in S_n\}$.

Bestimmen Sie die orthogonale Projektion von $\mathcal{H}$ auf $\mathcal{F}$, indem Sie diese mit Hilfe der unitären Operatoren U_σ ausdrücken.

Bemerkung: In der Quantenmechanik heißt $\mathcal{F}$ auch der symmetrische n-Teilchen-Raum und ist ein direkter Summand des symmetrischen Fockraumes.

(c) Abstrakt sieht das ganze so aus: Sei $(G, \circ)$ eine endliche Gruppe und $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Sei $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ die Gruppe der unitären Operatoren auf $\mathcal{H}$ und

$$\pi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H}) : g \mapsto U_g$$

ein Gruppenhomomorphismus, d.h. $U_g \cdot U_h = \pi(g) \cdot \pi(h) = \pi(g \circ h) = U_{g \circ h}$ (man sagt auch, π sei eine unitäre Darstellung der Gruppe G).

Zeigen Sie: Die orthogonale Projektion P auf den Fixraum
$\mathcal{F} := \{x \in \mathcal{H} \ : \ U_g x = x \text{ für alle } g \in G\}$ ist durch

$$P = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} U_g$$

gegeben.

(d) Sei $0 \neq x \in \mathcal{H}$ und $M(x)$ die abgeschlossene konvexe Hülle der Menge $\{U_g x : g \in G\}$.

Zeigen Sie: $M(x)$ besitzt ein eindeutig bestimmtes Element v mit minimaler Norm und es gilt: $\{v\} = M \cap \mathcal{F} = P(x)$.