Technische Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik

Prof. B. Kümmerer, WS 08/09

Funktionalanalysis 5. Übungsblatt 19. 11. 2008

ANWESENHEITSÜBUNGEN

Aufgabe A1: (Orthogonale direkte Summen abgeschlossener Teilräume sind abgeschlossen)
Sei $\mathcal{H}$ Prä-Hilbertraum und seien $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{H}$ und $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{H}$ zwei abgeschlossene Teilräume von $\mathcal{H}$ mit $\mathcal{K} \perp \mathcal{L}$.
Zeigen Sie: $\mathcal{K} + \mathcal{L} := \{x + y : x \in \mathcal{K}, y \in \mathcal{L}\}$ ist abgeschlossen.

Aufgabe A2: (Unendliche direkte Summen)
Für $i \in \mathbb{N}$ sei $\mathcal{H}_i$ ein Prä-Hilbertraum. Sei $\mathcal{H} := \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} : x_i \in \mathcal{H}_i,\ \sum_{i\in\mathbb{N}} ||x_i||_i^2 < \infty\}$.
Zeigen Sie:

1.) Mit den punktweisen Vektorraumoperationen und $< x, y > := \sum_{i\in\mathbb{N}} < x_i, y_i >$ mit $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{H}$, $y = (y_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{H}$ ist ein Prä-Hilbertraum.

2.) $\mathcal{H}$ ist genau dann vollständig, wenn $\mathcal{H}_i$ vollständig ist für alle $i \in \mathbb{N}$.

Aufgaben A3: (Approximation durch Polynome)
Zeigen Sie, dass es eindeutig bestimmte komplexe Zahlen a, b, c gibt, so dass

$$\int_{-1}^{1} |x^3 - a - bx - cx^2|^2 \, dx$$

minimal wird, d.h. , unter allen Polynomen vom Grad ≤ 2 existiert ein eindeutiges Polynom, welches das Polynom p mit $p(x) = x^3$ im obigen Sinn am besten approximiert. Berechnen Sie die Zahlen a, b, c.

Aufgaben A4: (Satz von Hahn-Banach in Hilberträumen)
Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $\mathcal{M}$ ein linearer Teilraum von $\mathcal{H}$ und $\varphi : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ ein stetiges lineares Funktional auf M.

(a) Zeigen Sie: Es existiert ein lineares Funktional $\overline{\varphi} : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$, welches φ fortsetzt, d.h. $\overline{\varphi}|_M = \varphi$.

(b) Weisen Sie nach, dass es genau eine Fortsetzung $\overline{\varphi}$ gibt mit $\|\overline{\varphi}\| = \|\varphi\|$. (Diese Aussage ist in vielen Banachräumen falsch!)

(c) Gelten obige Aussagen auch, wenn $\mathcal{H}$ ein Prä-Hilbertraum ist?

Aufgaben A5: (Beispiel für ein singuläres Maß)
Finden sie ein einfaches Beispiel zweier Wahrscheinlichkeitsmaße μ und ν, so dass es eine μ-Nullmenge N gibt mit $\nu(N) = 1$.

HAUSÜBUNGEN

Aufgabe H1: (Bedingte Erwartung)
Sei $\mathcal{H}$ der Hilbertraum $\mathcal{H} = L^2(\Omega, \Sigma, \mu)$ mit $\mu(\Omega) < \infty$. Für $n \in \mathbb{N}$ seien $A_1, \ldots, A_n \in \Sigma$ paarweise disjunkte Mengen mit $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$ und $\mu(A_i) \neq 0$, für alle $1 \leq i \leq n$. Die von $A_1, \ldots, A_n$ erzeugte σ- Unteralgebra von Σ bezeichnen wir mit Σ_0.

(a) Zeigen Sie: Die Menge

$$V = \{f \in L^2(\Omega, \Sigma, \mu) \ : \ f \text{ ist messbar bezüglich } \Sigma_0\}.$$

ist ein abgeschlossener linearer Unterraum von $\mathcal{H}$.
Hinweis: Wie sehen Elemente von V aus?

(b) Bestimmen Sie die orthogonale Projektion P von $\mathcal{H}$ auf V.
Hinweis: Welche Eigenschaft hat $f - Pf$?

Bemerkung: Handelt es sich bei μ um ein Wahrscheinlichkeitsmaß, so bezeichnet man $P(f)$ als *bedingte Erwartung von f gegeben* Σ_0 und schreibt für $P(f)$ auch $\mathbb{E}(f|\Sigma_0)$.

Aufgabe H2: (Ein ziemlich singuläres Maß)
Auf dem Intervall $[0, 1]$ sei λ das Lebesgue-Maß.
Sei $S \subseteq [0, 1]$ definiert als

$$S :=]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[\cup]\frac{1}{9}, \frac{2}{9}[\cup]\frac{7}{9}, \frac{8}{9}[\cup]\frac{1}{27}, \frac{2}{27}[\ldots$$

Sei $C := [0, 1] \setminus S$.

a) Zeigen Sie: $\lambda(C) = 0$.
(Hinweis: Was ist $\lambda(S)$?)

b) Sei eine Funktion τ auf S definiert durch
$\tau(x) = \frac{1}{2}$ für $x \in]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$,

$\tau(x) = \frac{1}{4}$ für $x \in]\frac{1}{9}, \frac{2}{9}[$,

$\tau(x) = \frac{3}{4}$ für $x \in]\frac{7}{9}, \frac{8}{9}[$, etc.
Machen Sie sich klar: τ besitzt eine eindeutige Fortsetzung zu einer stetigen Funktion τ auf $[0, 1]$ (Sie brauchen den Beweis nicht im einzelnen ausarbeiten). τ ist auf S differenzierbar und hat dort die Ableitung 0.

c) Ein Satz aus der Maßtheorie besagt:
Es gibt genau ein Maß ν auf der Borel-σ-Algebra von $[0, 1]$ mit

$$\nu([a, b]) = \nu(]a, b[) = \tau(b) - \tau(a) \ .$$

Zeigen Sie: ν ist singulär bezüglich λ.

d) Zusatz: Zeigen Sie: C ist überabzählbar.
Hinweis: Charakterisieren Sie die Punkte $x \in C$ durch ihre triadische Entwicklung.

Also: C ist überabzählbar und kompakt, das Komplement ist dicht und hat Lebesguemaß 1. Sicher haben Sie inzwischen bemerkt, dass C unter dem Namen „Cantormenge“ berühmt ist.