Funktionalanalysis 4. Übungsblatt 12. 11. 2008

ANWESENHEITSÜBUNGEN

Aufgabe A1: (**Skalarprodukt auf Quotienten**)
Sei V ein Vektorraum mit Semi-Skalarprodukt $< \, , \, >$ und sei $N := \{x \in V : < x, x > = 0\}$.
Zeigen Sie: Auf dem Quotientenraum V/N ist $< [x], [y] > := < x, y >$ ein wohldefiniertes Skalarprodukt.

Aufgabe A2: (Ein bisschen Wahrscheinlichkeitstheorie)
Gegeben seien zwei reellwertige Zufallsvariablen X und Y mit endlichen Erwartungswerten und endlichen Varianzen.
Zeigen Sie: Ist die Korrelation zwischen X und Y gleich ± 1, so müssen X und Y einer Gleichung $Y = aX + b$ genügen mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Aufgaben A3: (Hilbertraumnorm)
Sei $(\mathcal{H}, \| \cdot \|)$ ein Prähilbertraum.

(i) Zeigen Sie: Für $x, y \in \mathcal{H}$, $\|x\| = \|y\| = 1$ und $x \neq y$ ist $\|\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\| < 1$.

(ii) Interpretieren Sie die Aussage aus (i) geometrisch: Wie sieht die Einheitskugel von $(\mathcal{H}, \| \cdot \|)$ aus?

(iii) Zeigen Sie mit Hilfe von (i), dass die Normen $\| \cdot \|_1$ und $\| \cdot \|_\infty$ auf $\mathbb{C}^n$ nicht von einem Skalarprodukt erzeugt werden.

Aufgabe A4: (Keine Hilbertraum-Norm)
Zeigen: Für $1 < p < \infty$, $p \neq 2$, ist $||\cdot||_p$ auf $\mathbb{C}^n$ keine Hilbertraum-Norm, d.h., keine Norm, die von einem Skalarprodukt kommt. (Warum reicht es, das für $n = 2$ zu überprüfen?)

HAUSÜBUNGEN

Aufgabe H1: (Große Einheitskugeln)

a) Finden Sie in den Einheitskugeln von $(\mathcal{C}([0,1]), ||\cdot||_\infty)$, und von $(L^p([0,1]), ||\cdot||_p)$ konkrete Beispiele von Folgen, die keine konvergente Teilfolge enthalten.

b) Auf $l^\infty(\mathbb{N})$ betrachte $||x||_Q := \limsup_n |x_n|$ für $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty(\mathbb{N})$.

   i) Zeigen Sie: $||\cdot||_Q$ ist eine Halbnorm auf $l^\infty(\mathbb{N})$ und es ist $||x||_Q = 0$ genau dann, wenn $x \in c_0(\mathbb{N})$.

   ii) Zeigen Sie, dass $||x||_Q = ||[x]||_0$, wo wieder $||\cdot||_0$ die Quotientennorm auf $l^\infty(\mathbb{N})/c_0(\mathbb{N})$ bezeichnet.

c) Bestimmen Sie eine überabzählbare Teilmenge M der abgeschlossenen Einheitskugel von $(\ell^\infty(\mathbb{N})/c_0(\mathbb{N}), \|\cdot\|_0)$ mit der Eigenschaft, dass $\|x-y\|_0 = 1$ für $x, y \in M,\ x \neq y$ ist.
Hinweis: Betrachten Sie Null-Eins-Folgen. Wann sind zwei Null-Eins-Folgen in derselben Äquivalenzklasse.

Aufgabe H2: (Positiv definite Folgen)
Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ heißt positiv definit, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

(i) $a_n = \overline{a}_{-n}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

(ii) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und beliebige komplexe Zahlen $z_{-n}, z_{-n+1}, \ldots, z_{n-1}, z_n$ ist

$$\sum_{-n\leq i,j\leq n} a_{j-i}\overline{z}_i z_j \geq 0\,,$$

wobei die Gleichheit genau dann gilt, wenn $z_{-n} = z_{-n+1} = \ldots = z_{n-1} = z_n = 0$ ist.

Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(a) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ ist positiv definit.

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die $(2n+1)\times(2n+1)$-Matrix $C = (c_{ij})$ mit $c_{ij} := a_{j-i}$ positiv definit.

(c) Auf dem Raum der endlichen Folgen
$\mathcal{F}(\mathbb{Z}) = \{f = (f_n)_{n\in\mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{C} \ :\ f_n \neq 0$ für nur endlich viele $n \in \mathbb{Z}\}$ definiert
$\langle f, g\rangle := \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} a_{n-m} f_m\, \bar{g}_n$ ein Skalarprodukt.