Technische Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik

Prof. B. Kümmerer, WS 08/09

Funktionalanalysis 3. Übungsblatt 05. 11. 2008

ANWESENHEITSÜBUNGEN

Aufgabe A1: (Quotientenabbildung)
Seien E, F normierte Räume, $T : E \to F$ linear, $H \subseteq E$ abgeschlossener Teilraum, sodass $H \subseteq$ Kern T. Dann kann man $\tilde{T} : E/H \to F$ kanonisch definieren und es ist $||T|| = ||\tilde{T}||$.

Aufgabe A2: (Isomorphismen) Zeigen Sie: Ist $T : E \to F$ linear und bijektiv, sodass $||T||_{Op} \leq 1$ und $||T^{-1}||_{Op}|| \leq 1$, dann ist T isometrisch: $||Tx|| = ||x||$ für alle $x \in E$.

Aufgabe A3: (Multiplikationsoperatoren) Sei $E := \mathcal{C}([0,1])$, $g \in E$ und $T_g : \mathcal{C}([0,1]) \ni f \mapsto g \cdot f \in \mathcal{C}([0,1])$.
Bestimmen Sie die Operatornorm $||T_g||_{Op}$, falls

- E mit der Supremumsnorm $|| \cdot ||_\infty$ versehen wird.
- E mit der L^1-Norm $|| \cdot ||_1$ versehen wird.

Was vermuten Sie für die anderen p-Normen?

Aufgabe A4: (Unendlich große Matrizen)
Gegeben sei $(a_{j,k})_{j,k\in\mathbb{N}}$ mit $a_{j,k} \in \mathbb{C}$ und $M := \sup\{|a_{j,k}| \;:\; j,k \in \mathbb{N}\} < \infty$.
Für $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N})$ definiere $Ax := y$ mit $y = (y_j)_{j\in\mathbb{N}}$, $y_j =: \sum_{k=1}^{\infty} a_{j,k} x_k$.

(a) Zeigen Sie, dass $A : \ell^1(\mathbb{N}) \to \ell^\infty(\mathbb{N})$ eine stetige lineare Abbildung ist.

(b) Berechnen Sie die Operatornorm von A.

Aufgabe A5: (Integraloperatoren)
Sei $k : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{C}$ eine stetige Abbildung. Definiere eine Abbildung T als

$$(Tf)(x) := \int_a^b k(x,y) f(y)\, dy \qquad \text{für } f \in (\mathcal{C}([a,b]), \|\cdot\|_\infty).$$

(a) Zeigen Sie, dass $T : (\mathcal{C}([a,b]), \|\cdot\|_\infty) \to (\mathcal{C}([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ ein stetiger Operator ist.

(b) Bestimmen Sie eine obere Schranke für $\|T\|_{\text{op}}$.

(c) Berechnen Sie $\|T\|_{\text{op}}$ für den Fall, dass $k(x,y) \neq 0$ für alle $x, y \in [a,b]$ ist.

(d) Erläutern Sie die Analogie zu Aufgabe A4.

HAUSÜBUNGEN

Aufgaben H1: (Grundraumtransformation)
Gegeben sei eine stetige Funktion $h : [0,1] \to [0,1]$. Wir definieren den Operator T_h auf $\mathcal{C}([0,1])$ durch:

$$T_h(u) := u \circ h.$$

(a) Zeigen Sie, dass $T_h : (\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty) \to (\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ eine beschränkte lineare Abbildung ist.

(b) Bestimmen Sie die Operatornorm von T_h.

(c) Zeigen Sie die beiden folgenden Aussagen:

  (i) h ist injektiv genau dann, wenn T_h surjektiv ist.

  (ii) h ist surjektiv genau dann, wenn T_h injektiv ist.

(d) Bestimmen Sie den Kern von T_h.

e) Zeigen Sie: Bezüglich der punktweisen Multiplikation von Funktionen ist $(\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ eine Banachalgebra und T_h ist ein Algebra-Homomorphismus.

Setzen Sie dieses Ergebnis in Verbindung mit Ihrer Bestimmung von Kern T_h.

Bemerkung: Die Abbildung h wird auch als Grundraumtransformation bezeichnet.

Aufgabe H2: (**Wann ist die Einheitskugel kompakt?**)

a) Sei $(E, ||\cdot||)$ normierter Raum und $H \subset E$ echter abgeschlossener Teilraum. Zeigen Sie: Für $\epsilon > 0$ existiert ein Element $x \in E$ mit $||x|| = 1$ und $||x - h|| > 1 - \epsilon$ für alle $h \in H$.

Hinweis: Machen Sie sich zunächst die Aussage in $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{C}^n$ mit der euklidischen Norm klar. Dann verstehen Sie die folgende Strategie:

Für ein Element $z \notin H$ finden Sie ein Element $y \in H$ sodass $||z - h||$ möglichst klein wird und betrachten Sie $x := \frac{z-h}{||z-h||}$.

b) Zeigen Sie nun: Ist der normierte Raum $(E, ||\cdot||)$ nicht endlich-dimensional, so ist die Einheitskugel nicht kompakt.