Technische Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik

Prof. B. Kümmerer, WS 08/09

Funktionalanalysis — 2. Übungsblatt — 29.10.2008

ANWESENHEITSÜBUNGEN

Diesmal etliche kleine Aufgaben

Aufgabe A1: (Abschluß u.a.)

(a) Berechnen Sie das Innere und den Abschluss der Menge

$$A := \{f \in \mathcal{C}([-1,1]) \ : f > 0\}$$

in $(\mathcal{C}([-1,1]), \|\cdot\|_\infty)$.

(b) Berechnen Sie das Innere und den Abschluss der Menge

$$B := \{f \in L^1([-1,1]) \ : \ f > 0 \text{ fast überall}\}$$

in $L^1([-1,1], \|\cdot\|_1)$.

Aufgabe A2: (Halbnorm und Quotient:)
Sei E Vektorraum, $||\cdot||$ Halbnorm auf E und $H := \{x \in E : ||x|| = 0\}$. Sei die Halbnorm $||\cdot||_0$ auf dem Quotienten E/H definiert wie in der Vorlesung. Zeigen Sie: $||\cdot||_0$ ist eine Norm auf E/H.

Aufgaben A3: (Banachraumwertige stetige Funktionen)
Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und K eine kompakte Menge, ferner sei $f : K \to E$ eine stetige Abbildung. Zeigen Sie, dass $\|f\|_\infty := \sup\{\|f(x)\| \ : \ x \in K\}$ existiert, und dass somit durch $\|\cdot\|_\infty$ eine Norm auf dem Raum $\mathcal{C}(K; E)$ der stetigen Funktionen mit Werten in E definiert wird (das hatten wir schon in der Vorlesung kurz angesprochen).

Zeigen Sie nun: Ist E ein Banachraum, dann ist auch $\mathcal{C}(K; E)$ ein Banachraum (Sie können zur Vereinfachung auch $K = [0,1]$ annehmen).

Aufgabe A4: (Vervollständigung)
Vervollständigen Sie den Beweis der Vollständigkeit der Vervollständigung eines normierten Raumes in 2.21 der Vorlesung.

Aufgabe A5: (Ein Quotientenraum)
Sei $E := (\mathcal{C}([0,1]), ||\cdot||_\infty)$ und $H := \{f \in E : f(x) = 0 \text{ für } x \geq \frac{1}{3}\}$. Zeigen Sie: H ist abgeschlossen und identifizieren Sie E/H mit einem bekannten Banachraum.

Aufgabe A6:
(Geometrische Interpretation von Normen und konvexe Mengen)

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) und $K \subset V$ eine Teilmenge von V mit folgenden Eigenschaften:

(i) K ist konvex.
(ii) K ist absorbierend, d.h. $\forall\, x \in V\ \exists\, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0\ :\ x \in \alpha \cdot K := \{\alpha k \mid k \in K\}$.
(iii) K ist kreisförmig, d.h., $\forall\, x \in K\ \ \forall\, \beta \in \mathbb{K}$ mit $|\beta| = 1$ ist $\beta x \in K$.

(a) Zeigen Sie: Durch $\|x\| := \inf\{\alpha > 0 \mid x \in \alpha \cdot K\}$ wird eine Halbnorm auf V definiert.

(b) Welche Eigenschaft einer Halbnorm ist nicht erfüllt, wenn man die Eigenschaft (i) (bzw. (ii), bzw. (iii)) nicht berücksichtigt?

(c) Wie muss K beschaffen sein, dass die in Aufgabenteil (a) definierte Halbnorm eine Norm ist. Geben Sie ein Beispiel an, bei dem K nur eine Halbnorm erzeugt.

(d) Ein Element x einer konvexen Menge K heißt *Extremalpunkt* von K, falls aus $x = \lambda y + (1 - \lambda)z$ mit $y, z \in K$ und $\lambda \in [0, 1]$ folgt, dass $y = x = z$ ist.

Sei nun $K := \{x \in X\ \ :\ \ \|x\| \leq 1\}$ die Einheitskugel eines normierten Raumes $(E, \|\cdot\|)$. Zeigen Sie: $\|x\| = 1$ für jeden Extremalpunkt x von K.

(e) Bestimmen Sie die Extremalpunkte der Einheitskugeln in $\mathbb{R}^2$ für die p-Normen, $1 \leq p \leq \infty$.

(f) Weisen Sie nach, dass in

$$E := \mathcal{C}([0, 1]),\ \text{mit}\ \|f\|_1 := \int_0^1 |f(t)|\, dt$$

die Einheitskugel K keinen Extremalpunkt besitzt. Hierbei sei, wie üblich, $\mathcal{C}([0, 1])$ der Raum der stetigen Funktionen auf $[0, 1]$.

HAUSÜBUNGEN

Aufgabe H1: (Abgeschlossen + abgeschlossen ist nicht immer abgeschlossen)
Sei $E := l^1(\mathbb{N})$ (mit der l^1-Norm) und betrachte die beiden Teilräume
$U := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^1(\mathbb{N}) : x_{2n} = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}\}$,
$V := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^1(\mathbb{N}) : x_{2n-1} = nx_{2n} \ \forall n \in \mathbb{N}\}$.
Zeigen Sie:

a) U und V sind abgeschlossene Teilräume von $l^1(\mathbb{N})$.

b) $U + V := \{u + v : u \in U, v \in V\}$ ist nicht abgeschlossen in $l^1(\mathbb{N})$.
(Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass der Raum der endlichen Folgen $\mathcal{F}(\mathbb{N}) \subseteq U+V$.)

Aufgabe H2: (Vollständigkeit von normierten Räumen)
Zeigen Sie: Ist $(E, ||\cdot||_E)$ ein normierter Raum und H abgeschlossener Teilraum von E, sodass $(H, ||\cdot||_E)$ und E/H mit der Quotientennorm beide vollständig sind, dann ist auch $(E, ||\cdot||_E)$ vollständig.
Hinweis: Wie können Sie die Vollständigkeit von H ins Spiel bringen?

PREISAUFGABE

In der Vorlesung hatten wir besprochen: Ist E normierter Raum, $H \subseteq E$ abgeschlossener Teilraum, so ist die Norm auf dem Quotienten E/H gegeben durch
$||[x]||_0 := \inf\{||x + h|| : h \in H\}$.

Problem: Sei nun E sogar ein Banachraum. Beweisen oder widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel die Vermutung, dass in diesem Fall das Infimum angenommen wird, also durch ein Minimum ersetzt werden kann.

Die erste bei mir abgegebene ausgearbeitete Lösung wird mit einem Buchpreis belohnt. Abgabeschluss ist Montag, der 5. Februar 2009, in der Vorlesung.

Hinweis: Die Frage kann mit den Hilfmitteln, die wir bisher in der Vorlesung besprochen haben, beantwortet werden. Weitere Überlegungen aus der Vorlesung können aber noch auf die Sprünge helfen.