Funktionalanalysis 14. Übungsblatt 12. 02. 2009

ANWESENHEITSÜBUNGEN

Aufgaben A1: (Extremalpunkte)

a) Bestimmen Sie die Extremalpunkte

- der Einheitskugel von $(c_0(\mathbb{N}), ||\cdot||_\infty)$.
- der Einheitskugel von $(L^1([0,1],\lambda), ||\cdot||_1)$ (λ das Lebesguemaß auf $[0,1]$).
- der Einheitskugel von $(L^\infty([0,1],\lambda), ||\cdot||_\infty)$.

b) Zeigen Sie mit Hilfe von Teil a): Die Räume $(c_0(\mathbb{N}), ||\cdot||_\infty)$ und $(L^1([0,1],\lambda), ||\cdot||_1)$ besitzen keinen Prädual (Ein normierter Raum F heißt Prädual eines Banachraumes E, falls F' isometrisch isomorph ist zu E).

c) Zeigen Sie: Die Menge $\mathcal{P} := \{f \in (L^\infty([0,1],\lambda), ||\cdot||_\infty) \ : \ ||f||_\infty \leq 1, f \geq 0\}$ ist $\sigma(L^\infty, L^1)$ - kompakt und konvex. Bestimmen Sie die Extremalpunkte von $\mathcal{P}$.

Aufgabe A2: (Fouriertransformation auf Distributionen)
Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\omega \in \mathbb{R}$, sei die Fouriertransformation definiert durch

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x)dx \ .$$

Als Operator schreiben wir auch $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \ni f \mapsto \hat{f}$.
Weiter sei $Q := M_x : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \ni f \mapsto x \cdot f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ und $P := \frac{1}{i}D : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \ni f \mapsto \frac{1}{i}f' \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
Zeigen Sie:

a) $\widehat{Pf} = Q\hat{f}$, also $\widehat{f'}(\omega) = i\omega\hat{f}(\omega)$ und $\widehat{Qf} = -P\hat{f}$, also $\hat{f}' = -i(\widehat{xf})$,

b) und mit Hilfe von a): $\mathcal{F}(\mathcal{S}(\mathbb{R})) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

c) $\mathcal{F} : (\mathcal{S}(\mathbb{R}), \mathcal{P}) \to (\mathcal{S}(\mathbb{R}), \mathcal{P})$ ist stetig.

d) Für $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist $\varphi_{\hat{f}}(g) = \int \hat{f}g = \int f\hat{g} = \varphi_f(\hat{g})$. Wie berechnet sich also die Fouriertransformation einer Distribution?

e) Bestimmen Sie die Fouriertransformationen von δ_x und von $e^{i\omega t}$ (warum kann auch letztere nicht als klassische Fouriertransformation bestimmt werden?).

Aufgabe A3: (Der Satz von Krein-Milman und die Semesterabschluss-Pizza)
Sei $E := (L^\infty_{\mathbb{R}}([0,1],\lambda), ||\cdot||_\infty)$ der Raum der reellen Funktionen in L^∞, $f_1,\dots,f_n$ relle Funktionen in $(L^1([0,1],\lambda), ||\cdot||_1)$. Betrachte

$$T : E \to \mathbb{R}^n : L^\infty_{\mathbb{R}}([0,1]) \ni g \mapsto \left(\int_0^1 g\cdot f_1\,d\lambda,\dots,\int_0^1 g\cdot f_n\,d\lambda\right) \in \mathbb{R}^n .$$

Zeigen Sie:

a) $T(\mathcal{P}) \subseteq \mathbb{R}^n$ ist kompakt und konvex (für $\mathcal{P}$ wie in Aufgabe A1.c).

b) Ist p irgendein Punkt in $T(\mathcal{P})$ (also nicht notwendig ein Extremalpunkt), dann existiert ein Extremalpunkt e von $\mathcal{P}$ mit $T(e) = p$ (das ist natürlich eine sehr ungewöhnliche Situation!). Zeigen Sie dazu:

- $\mathcal{P}_p := \{g \in \mathcal{P} : T(g) = p\}$ ist $\sigma(L^\infty, L^1)$-kompakt und konvex, besitzt also Extremalpunkte.
- Ist g ein Extremalpunkt von $\mathcal{P}_p$, so ist g ein Extremalpunkt von $\mathcal{P}$.

  Hinweis: Ist $g \in \mathcal{P}_p$ kein Extremalpunkt von $\mathcal{P}$, dann existiert nach Aufgabe A1.c zu einem $\epsilon > 0$ eine messbare Menge $A \subseteq [0,1]$ mit Lebesguemaß echt größer als 0 und $\epsilon \le g(t) \le 1-\epsilon$ für $t \in A$. Da $L^\infty(A) := \{f \in L^\infty_{\mathbb{R}}([0,1]) : f(t) = 0\ \forall\, t \notin A\}$ unendlich dimensional ist, gibt es $g_\epsilon \in L^\infty(A)$ mit $T(g_\epsilon) = 0$ und $||g_\epsilon||_\infty < \epsilon$.

c) $\left\{ \left(\int_A f_1\,d\lambda,\dots,\int_A f_n\,d\lambda\right) \in \mathbb{R}^n : A \subseteq [0,1] \text{ messbar } \right\}$ ist kompakt und konvex (Satz von Lyapunov).

   Bemerkung: Wenn Sie die Argumente nochmal durchgehen, sehen Sie, dass der Satz von Lyapunov noch genauso gilt, wenn Sie den Maßraum $([0,1],\lambda)$ durch einen beliebigen endlichen Maßraum (Ω,μ) ersetzen, in welchem das Maß μ keine „Atome“ hat, d.h., für jede messbare Menge $A \subseteq \Omega$ gibt es eine messbare Teilmenge $B \subseteq A$ mit $\mu(B) = \frac{1}{2}\mu(A)$.

d) Ist $f_i \ge 0$ mit $\int_0^1 f_i\,d\lambda = 1$, $1 \le i \le n$, dann gibt es für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine Zerlegung von $[0,1]$ in paarweise disjunkte messbare Mengen $A_1,\dots,A_k$ sodass $\int_{A_j} f_i\,d\lambda = \frac{1}{k}$ für $1 \le i \le n, 1 \le j \le k$.

   Hinweis: Offenbar ist $T(\mathbb{1}) = (1,\dots,1) \in \mathbb{R}^n$ und $T(0) = (0,\dots 0) \in \mathbb{R}^n$. Folgern Sie aus c), dass es eine messbare Menge $A_1 \subseteq [0,1]$ gibt mit $T(\chi_{A_1}) = (\frac{1}{k},\dots,\frac{1}{k}) \in \mathbb{R}^n$ (wie üblich bezeichnet χ_A die charakteristische Funktion von A). Benutzen Sie nun die in der Bemerkung formulierte leichte Verallgemeinerung des Satzes von Lyapunov und vollständige Induktion.

e) Zur Feier des Semesterabschlusses backen Sie eine große runde Pizza mit n Belägen. Zeigen Sie, dass Sie diese Pizza gerecht auf k Personen aufteilen können, d.h., jede Person erhält ein Stück der Pizza, auf welchem sich von jedem der n Beläge genau $\frac{1}{k}$ befindet.

   Hinweis: Führen Sie auf der Pizza Polarkoordinaten ein und legen Sie keine Oliven mit Kernen auf die Pizza: Dann können Sie annehmen, dass es für den i-ten Belag eine Funktion $f_i \in L^1([0,1])$ gibt mit $f_i \ge 0$ und $\int_0^1 f_i d\lambda = 1$, sodass sich auf dem Pizzastück $\{(r,\phi) : 0 \le r \le R \gg 0,\ \frac{\phi}{2\pi} \in A \subseteq [0,1]\}$ vom i-ten Belag der Anteil $\int_A f_i\,d\lambda$ befindet.

f) Nach dieser nahrhaften Anwendung der Funktionalanalysis bedanken wir uns für Ihre Mitarbeit und wünschen Ihnen eine gute vorlesungsfreie Zeit!

Technische Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Prof. B. Kümmerer

Spektraltheorie

Vorlesung

Sommersemester 2009

Inhalt: Funktionalanalysis übeträgt Ideen der linearen Algebra auf Vektorräume von Funktionen. Dieser Leitgedanke findet seine natürlich Fortsetzung in der Spektraltheorie: Sie überträgt die Idee der Eigenwerte und Eigenvektoren auf lineare Abbildungen auf Funktionenräumen. Im Zentrum der Vorlesung steht der operatoralgebraische Zugang zur Spektraltheorie von Operatoren auf Hilberträumen mit einigen Ausblicken in die Theorie der Operatoralgebren.

Zielgruppe: Die Vorlesung richtet sich an Studierende der Mathematik und Physik ab 6. Semester mit Vorkenntnissen in Funktionalanalysis und Interesse an Funktionalanalysis, Operatoralgebren, mathematischer Physik, Quantenmechanik, ebenso wie an Studierende mit Interessen in der Darstellungstheorie, Liegruppen oder angewandter Analysis. Insbesondere ist sie Teil des Vertiefungszyklus „Darstellungstheorie und Operatoralgebren.“ Unabhängig von den vielfältigen Anwendungen hat aber auch die Verbindung von analytischen Fragestellungen mit algebraischen Methoden ihren eigenen mathematischen Reiz.

Fortsetzung: Die Vorlesung wird im darauffolgenden Semester fortgesetzt mit Veranstaltungen über Operatoralgebren, an welche sich bei Interesse unmittelbar wissenschaftliche Arbeiten anschließen können.

Format: Die Veranstaltung ist im Format 2+1 geplant. Die Vorlesung findet dienstags, 11.40 - 13.20, im Raum S101/2 statt.

Literatur: Conway, A Course in Functional Analysis. Weitere Literatur wird in der Vorlesung angegeben.

Technische Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Prof. B. Kümmerer

Funktionalanalysis: Positive Definitheit

Seminar

Sommersemester 2009

Das **Thema** "Positive Definitheit" schlägt eine Brücke zwischen Funktionalanalysis und Darstellungstheorien in verschiedenen Bereichen der Mathematik, z.B. Darstellungen von Gruppen, Darstellungen von Operatoralgebren, Darstellungen stochastischer Prozesse. Die Idee des Seminars ist es, scheinbar recht verschiedene Gedanken in der Mathematik unter einem einheitlichen Gesichtspunkt zu betrachten und verstehen zu lernen. Fast immer werden positiv definite Kerne oder Funktionen dazu benutzt, einen geeigneten Hilbertraum für die gesuchten Darstellungen zu konstruieren.

Voraussetzung für die Teilnahme an diesem Seminar sind gute Kenntnisse in Funktionalanalysis. Welche Schwerpunkte wir im einzelnen setzen werden, hängt auch von den weiteren Vorkenntnissen und Interessen der Teilnehmerinnen und Teilnehmer ab.
In Kombination mit der Vorlesung „Spektraltheorie" im Sommersemester 2009 eignet sich das Seminar auch als Grundlage für **wissenschaftliche Arbeiten**.

Anmeldung: im Sekretariat, Raum 103, bei Frau Müller.