Technische Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Prof. B. Kümmerer, WS 08/09

Funktionalanalysis 13. Übungsblatt 05. 02. 2009

ANWESENHEITSÜBUNGEN

Aufgabe A1: (Offene Nullumgebungen sind absorbierend)
Sei $(E, \mathcal{P})$ lokalkonvexer Vektorraum. Zeigen Sie:
Ist $U \subseteq E$ offen mit $0 \in U$, so ist U absorbierend.

Aufgabe A2: (Konvergenz der δ_n)
Sei, wie üblich, $\delta_n : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, $\delta_n(m) := \delta_{n,m}$. Dann liegt δ_n in jedem der Räume $c_0 := c_0(\mathbb{N})$, $l^1 := l^1(\mathbb{N})$, $l^p := l^p(\mathbb{N})$ $(1 < p < \infty)$, $l^\infty(\mathbb{N})$.
Untersuchen Sie die Konvergenz von $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\sigma(c_0, l^1)$, $\sigma(l^1, c_0)$, $\sigma(l^1, l^\infty)$, $\sigma(l^p, l^q)$, $\sigma(l^\infty,\ l^1)$, wenn Sie mutig sind, auch in $\sigma(l^\infty, l^{\infty\prime})$.

Aufgabe A3: (Adjungierte eines Funktionals)
Sei $(E; ||\cdot||)$ normiert und interpretieren Sie $f \in E'$ als lineare Abbildung in $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. Berechnen Sie die Adjungierte in $\mathcal{L}(\mathbb{K}, E')$.

Aufgabe A4: (Schwache Operatortopologie)
Seien E und F normierte Räume. Zeigen Sie:

a) Für $x \in E$ und $f' \in F'$ ist $\omega_{x,f'} : \mathcal{L}(E, F) \ni T \mapsto <Tx, f'> \in \mathbb{K}$ ein stetiges lineares Funktional auf $(\mathcal{L}(E, F), ||\cdot||_{Op})$.

b) Sei $G \subseteq \mathcal{L}(E, F)'$ die lineare Hülle dieser linearen Funktionale, dann ist G eine separierende Familie von linearen Funktionalen und $\sigma(\mathcal{L}(E, F), G)$ ist die schwache Operatortopologie swop auf $\mathcal{L}(E, F)$.

c) Bestimmen Sie den Dual von $(\mathcal{L}(E, F), \text{swop})$.

Bemerkungen:

1.) Die Linearform $\omega_{x,f'}$ kann man auch mit dem elementaren Tensor $x \otimes f'$ und G mit dem (algebraischen) Tensorprodukt $E \otimes F'$ identifizieren.

2.) In der statistischen Mechanik und in der Quantenfeldtheorie sind die Observable eines quantenmechanischen Systems durch eine *-Algebra von Operatoren auf einem Hilbertraum gegeben, die abgeschlossen ist in der schwachen Operatortopologie (äquivalenterweise in der starken Operatortopologie). Solche Operator-Algebren nennt man heute von Neumann-Algebren.

Aufgabe A5: (Trennen, was nicht zusammengehört)

a) Sei $(E; ||\cdot||)$ normiert und $F \subseteq E'$. Zeigen Sie:
F ist separierend für E genau dann wenn F σ^*-dicht in E' ist.

Hinweis: Umgeben Sie einen Punkt im Komplement des σ^*- Abschlusses von F mit einer geeigneten konvexen Menge und wenden Sie Satz 11.6 der Vorlesung an.

b) Sei $(E, ||\cdot||)$ normiert, dann ist $\{\hat{x} : x \in E, ||x|| \leq 1\}$ $\sigma(E'', E')$-dicht in der Einheitskugel von E''.

Hinweis: Wenden Sie 11.6 der Vorlesung geeignet an.

Aufgabe A6: (Adjungierte auf lokalkonvexen Vektorräumen: falls noch Zeit sein sollte ...)
Sei $(E, \mathcal{P})$ lokalkonvex, $E' := \{f' : E \to \mathbb{K}$ linear und stetig $\}$ der Dual von $(E, \mathcal{P})$. Zeigen Sie

a) Ein lineares Funktional $f' : (E, \mathcal{P}) \to \mathbb{K}$ ist stetig genau dann wenn f' $\sigma(E, E')$-stetig ist.

b) Ist $(F, \mathcal{P}')$ ein weiterer lokalkonvexer Vektorraum, und ist $T : E \to F$ $\sigma(E, E') - \sigma(F, F')$-stetig, dann existiert $T' : F' \to E'$ sodass $<T(x), f'> = <x, T'(f')>$ für alle $f' \in F'$ und T' ist $\sigma(F', F) - \sigma(E', E)$-stetig.

c) Sind E, F Banachräume und ist $T : E \to F$ $\sigma(E, E') - \sigma(F, F')$-stetig, dann ist T normstetig, also beschränkt.

Hinweis: Für den letzten Teil können Sie sich am Beweis von 10.13 der Vorlesung orientieren.

HAUSÜBUNGEN

Aufgabe H1: (Schwerpunkte von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf kompakten konvexen Mengen)
Sei K eine kompakte konvexe Menge nichtleere Teilmenge eines lokalkonvexen Vektorraumes $(E, \mathcal{P})$ und $A(K)$ die Menge der stetigen affinen Funktionen auf K. Zeigen Sie:

a) $A(K)$, versehen mit der Supremumsnorm, ist ein Banachraum.

b) Für $p \in K$ sei, wie üblich, $\delta_p : A(K) \ni f \mapsto f(p) \in \mathbb{K}$ (wir betrachten δ_p aber jetzt nur auf den affinen Funktionen!), dann ist $\hat{K} := \{\delta_p : p \in K\} \subseteq A(K)'$ konvex.

c) $\hat{K} \subseteq A(K)'$ ist σ^*-kompakt (Hinweis: Betrachten Sie z.B. die Abbildung $K \ni p \mapsto \delta_p \in A(K)'$).

d) Sei $f' \in A(K)'$ mit $f'(\mathbb{1}) = 1 = ||f'||$, dann gibt es ein $p \in K$ mit $f' = \delta_p$ (Hinweis: Falls nicht, trenne f' von $\hat{K}$).

e) Sei μ ein (reguläres Borel-) Wahrscheinlichkeitsmaß auf K, dann existiert genau ein Punkt $p \in K$ mit $f(p) = \int_K f(p) d\mu(p)$ für alle $f \in A(K)$.

Bemerkungen:

1.) Zur Veranschaulichung betrachten Sie ruhig auch niederdimensionale konvexe Mengen K. Der Punkt p heißt auch der Schwerpunkt des Wahrscheinlichkeitsmaßes μ. Machen Sie sich klar, dass diese Bezeichnung sinnvoll ist.

2.) Natürlich gibt es viele Wahrscheinlichkeitsmaße mit demselben Schwerpunkt p. Ist ein solches Wahrscheinlichkeitsmaß auf endlich vielen Punkten $q_1, \ldots, q_n$ konzentriert, so heißt das nur, dass man p als Konvexkombination der Punkte $q_1, \ldots, q_n$ schreibt.

3.) Die *Choquet-Theorie* versucht nun, solche Wahrscheinlichkeitsmaße zu konstruieren, die auf den Extremalpunkten von K konzentriert sind. Im wesentlichen geht das immer. Diese Theorie hat wiederum viele Anwendungen in der Mathematik und mathematischen Physik, ob man nun Gruppendarstellungen in irreduzible Darstellungen zerlegt oder quantenmechanische Zustände in reine Zustände; auch Greensfunktionen kann man aus diesem Blickwinkel verstehen und vieles mehr.

3.) In der Quantenmechanik bilden die Zustände eine konvexe Menge (in Verallgemeinerung der konvexen Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße), ihre Extremalpunkte heißen *reine Zustände*. In den letzten Jahren besteht ein großer Teil der Probleme der Quanteninformationstheorie darin, für geeignete konvexe Mengen von Zuständen (meist auf zusammengesetzten Systemen) die Extremalpunkte zu bestimmen und zu entscheiden, ob ein vorgegebener Zustand in dieser Menge liegt oder nicht, oft durch Trennung mittels geeigneter linearer Funktionale bzw. Hyperebenen. Die meisten wichtigen Fragen sind aber noch ungelöst.

Aufgabe H2: (Verallgemeinerte Limiten)
Sei $E := l^\infty_\mathbb{R}(\mathbb{N})$ der Raum der reellen beschränkten Folgen mit der Supremumsnorm und sei S der Linkssshift auf E, d.h., $S(x(1), x(2), \dots) = (x(2), x(3), \dots)$. $\mathbb{1} \in E$ bezeichne die Folge, die konstant gleich 1 ist.
In dieser Aufgabe zeigen Sie: Es gibt ein lineares Funktional ϕ auf $L^\infty(\mathbb{N})$, sodass gilt:

i) $||\phi|| = 1$

ii) Auf den konvergenten Folgen in $l^\infty(\mathbb{N})$ stimmt ϕ mit dem Limes überein.

iii) Für $x \in E$, $x \geq 0$, ist $\phi(x) \geq 0$.

iv) Für $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ ist $\liminf_n x_n \leq \phi(x) \leq \limsup_n x_n$.

v) Für $x \in E$ ist $\phi(x) = \phi(S(x))$.

a) Zeigen Sie: Sei $\mathcal{M} := \{x - S(x) : x \in E\}$, dann ist $\mathcal{M}$ linearer Teilraum von E und $d(\mathbb{1}, \mathcal{M}) := \inf ||z - \mathbb{1}|| : z \in \mathcal{M}\} = 1$.

b) Nach 9.12 der Vorlesung existiert ein lineares Funktional $\phi : l^\infty \to \mathbb{K}$ mit $||\phi = 1||$, $\phi(\mathbb{1}) = 1$ und $\phi(x) = 0$ für alle $x \in \mathcal{M}$, also $\phi(x) = \phi(S(x)$ für alle $x \in E$. Zeigen Sie: $\phi(x) = 0$ für alle $x \in c_0(\mathbb{N})$.

c) Zeigen Sie: Ist $x \in E$ mit $x \geq 0$, dann ist $\phi(x) \geq 0$.

   Hinweis: Sowohl für reelle Zahlen als auch für Elemente in l^∞ gilt: $0 \leq x \leq \mathbb{1}$ genau dann, wenn $||\mathbb{1} - x|| \leq 1$.