Technische Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik

Prof. B. Kümmerer, WS 08/09

Funktionalanalysis 12. Übungsblatt 29. 01. 2009

ANWESENHEITSÜBUNGEN

Aufgabe A1: (Separierende Teilräume von E')
Sei $(E; ||\cdot||)$ normiert und $F \subseteq E'$. Zeigen Sie:
F ist separierend für E genau dann wenn F σ^*-dicht in E' ist.

Aufgabe A2: (Adjungierte eines Funktionals)
Sei $(E; ||\cdot||)$ normiert und interpretieren Sie $f \in E'$ als lineare Abbildung in $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. Berechnen Sie die Adjungierte in $\mathcal{L}(\mathbb{K}, E')$.

Aufgabe A3: (Konvergenz der δ_n)
Sei, wie üblich, $\delta_n : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, $\delta_n(m) := \delta_{n,m}$. Dann liegt δ_n in jedem der Räume $c_0 := c_0(\mathbb{N})$, $l^1 := l^1(\mathbb{N})$, $l^p := l^p(\mathbb{N})$ $(1 < p < \infty)$, $l^\infty(\mathbb{N})$.
Untersuchen Sie die Konvergenz von $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\sigma(c_0, l^1)$, $\sigma(l^1, c_0)$, $\sigma(l^1, l^\infty)$, $\sigma(l^p, l^q)$, $\sigma(l^\infty, l^1)$, wenn Sie mutig sind, auch in $\sigma(l^\infty, l^{\infty\prime})$.

Aufgabe A4: (Offen impliziert absorbierend)
Sei $(E, \mathcal{P})$ lokalkonvexer Vektorraum. Zeigen Sie:
Ist $U \subseteq E$ offen mit $0 \in U$, so ist U absorbierend.

Aufgabe A5: (Folgen)
Sei $\mathcal{F}$ die Menge der endlichen Folgen in $l^1(\mathbb{N})$. Zeigen Sie:

a) $(\mathcal{F}, ||\cdot||_1)' = l^\infty$.

b) $\sigma(l^\infty, l^1) \neq \sigma(l^\infty, \mathcal{F})$: Geben Sie eine Folge in l^∞ an, die in $\sigma(l^\infty, \mathcal{F})$, nicht aber in $\sigma(l^\infty, l^1)$ konvergiert. Warum kann es sich nur um eine unbeschränkte Folge handeln?

Aufgabe A6: (Schwache Topologie und Norm-Topologie)
Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum.

(a) Zeigen Sie, dass jede schwach konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ beschränkt ist.

(b) Weisen Sie nach, dass die schwache Topologie gröber ist als die Normtopologie.

(c) Zeigen Sie: Ist $(E, \|\cdot\|)$ ein endlich dimensionaler Vektorraum, so ist die schwache Topologie gleich der Norm-Topologie.

(d) Zeigen Sie: Ist $(E, \|\cdot\|)$ ein unendlich dimensionaler Raum, so ist die schwache Topologie ungleich der Normtopologie. Hinweis: Zeigen Sie, dass jede Nullumgebung der schwachen Topologie lineare Teilräume enthält.

HAUSÜBUNGEN

Aufgabe H1: (Initiale Topologie)
Sei X eine Menge, und für $i \in I$ sei $(Y_i, \mathcal{T}_i)$ ein topologischer Raum, sowie $f_i : X \to Y_i$ eine Abbildung. $\mathcal{T}$ sei die initiale Topologie bezüglich $\{f_i : i \in I\}$. Zeigen Sie:

(a) Ist $(x_j)_{j\in J}$ ein Netz in X, dann gilt
$$\mathcal{T}\text{-}\lim_{j\in J} x_j = x_0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{für alle } i \in I \text{ ist} \quad \mathcal{T}_i\text{-}\lim_{j\in J} f_i(x_j) = f_i(x_0).$$

(b) Die Funktion $f : (Y, \mathcal{S}) \to (X, \mathcal{T})$ ist genau dann stetig, wenn für alle $i \in I$ die Funktionen $f_i \circ f : (Y, \mathcal{S}) \to (Y_i, \mathcal{T}_i)$ stetig sind.

Aufgabe H2: (Starke und schwache Operatortopologie)
Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum.

(a) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ eine schwach konvergente Folge mit Grenzwert $f \in \mathcal{H}$. Zeigen Sie: Konvergiert $(\|f_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\|f\|$, so konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in der Norm gegen f.

(b) Sei $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ die Menge aller unitären Operatoren auf $\mathcal{H}$. Zeigen Sie, dass auf $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ die schwache Operatortopologie und die starke Operatortopologie äquivalent sind (d.h., ein Netz in $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ konvergiert in der schwachen Operatortopologie genau dann, wenn es in der starken Operatortopologie konvergiert).

(c) Weisen Sie nach, dass die Abbildung $B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H})\,,\ x \mapsto x^*$ stetig bezüglich der schwachen Operatortopologie, aber nicht stetig bezüglich der starken Operatortopologie ist. (x^* bezeichnet die Hilbertraum-Adjungierte)
Hinweis: Kennen Sie ein Gegenbeispiel?

(d) Zeigen Sie: Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B(\mathcal{H})$ konvergiert in der starken Operatortopologie gegen Null genau dann, wenn $(x_n^* x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in der schwachen Operatortopologie gegen Null konvergiert.

Aufgabe H3: (Nicht immer gibt es stetige lineare Funktionale)
Sei $0 < p < 1$ und sei wie üblich $\mathcal{L}^p([0,1]) := \{f : [0,1] \to \mathbb{C} \text{ messbar} : \int_0^1 |f|^p \, d\lambda < \infty\}$ und $L^p([0,1])$ der Quotient von $\mathcal{L}^p([0,1])$ nach den Funktionen, die λ-fast überall verschwinden. λ bezeichne das Lebesgue-Maß. Dann ist $L^p([0,1])$ immer noch ein Vektorraum, wie man leicht sieht.
Zeigen Sie:

a) Sei $d(f,g) := \int_0^1 |f-g|^p \, d\lambda$ für $f, g \in L^p([0,1])$, dann definiert d eine Metrik auf $L^p([0,1])$.

b) Versieht man $L^p([0,1])$ mit der Metrik d so wird $L^p([0,1])$ zu einem topologischen Vektorraum $(E, \mathcal{T})$.

c) Sei $C \subseteq L^p([0,1])$ eine offene konvexe Nullumgebung, dann ist $C = L^p([0,1])$.

Hinweis: Wähle $\epsilon > 0$, sodas $\{f \in E : d(f,0) < \epsilon\} \subseteq C$ und zeigen Sie: Jedes $f \in L^p([0,1])$ liegt in der konvexen Hülle von $\{f \in E : d(f,0) < \epsilon\}$. Zerlegen Sie dazu geeignet $[0,1] = I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_n$ und schreiben Sie f als Konvexkombination $f = \sum_i \frac{1}{n}(n \cdot \chi_{I_i} \cdot f)$.

d) Das einzige stetige lineare Funktional auf $(E, \mathcal{T})$ ist das Nullfunktional.