Technische Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik

Prof. B. Kümmerer, WS 08/09

Funktionalanalysis 11. Übungsblatt 22. 01. 2009

ANWESENHEITSÜBUNGEN

Aufgabe A1: (Nach unten beschränkte Operatoren) Zeigen Sie: Seien E, F Banachräume. Für $A : E \to F$ stetig sind äquivalent:

a) Es gibt eine Konstante $C > 0$ sodass $||Ax|| \geq C||x||$ für alle $x \in E$.

b) A ist injektiv und das Bild $A(E) \subseteq F$ ist abgeschlossen.

Aufgabe A2: (Konvergenz auf einer ONB)
Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $\mathcal{E} := (e_i)_{i \in I}$ eine ONB von $\mathcal{H}$. Zeigen Sie: Für eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{H}$ sind äquivalent:

a) $\lim_{n\to\infty} < x_n, z > = 0$ für alle $z \in \mathcal{H}$.

b) $\lim_{n\to\infty} < x_n, e > = 0$ für alle $e \in \mathcal{E}$ und $\{||x_n|| : n \in \mathbb{N}\}$ ist beschränkt.

Aufgaben A3: (Der Dual von c_0)
Sei $(c_0(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty)$ der Raum aller Nullfolgen. Zeigen Sie, dass $\ell^1(\mathbb{N})$ isomorph zum Dual von $c_0(\mathbb{N})$ ist.
Zeigen Sie hierfür, dass die Abbildung

$$i : \ell^1(\mathbb{N}) \to (c_0)' \,,\ (i(s))(t) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n t_n \qquad \text{mit } s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ und } t = (t_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

ein isometrischer Isomorphismus ist, wobei $(c_0)'$ den Dual von c_0 bezeichnet.

Aufgaben A4: (Absolut summierbare Reihen)
Zeigen Sie: Für eine relle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind äquivalent:

i) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent.

ii) Für alle Nullfolgen $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} t_n \cdot a_n$.

Aufgabe A5: (Der Dual von $\ell^\infty(\mathbb{N})$ ist nicht isomorph zu $\ell^1(\mathbb{N})$: Ein anderer Beweis)
Sei $c := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C} \,:\, \lim_{n\to\infty} x_n \text{ existiert}\}$ der Raum aller konvergenten Folgen.

(a) Zeigen Sie: Es existiert eine lineares Funktional $\varphi : \ell^\infty(\mathbb{N}) \to \mathbb{C}$ mit $\varphi((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \lim_{n\to\infty} x_n$ für alle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c$.

(b) Zeigen Sie, dass keine Folge $s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N})$ existiert, so dass $\varphi(t) = \sum_{i=1}^{\infty} s_n t_n$ ist, für alle $t = (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N})$.

HAUSÜBUNGEN

Aufgabe H1: (Produkttopologie)
Wir versehen $\mathbb{R}$ mit der gewohnten Topologie, d. h.: $X \subseteq \mathbb{R}$ ist offen, falls für alle $x \in X$ ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $K_\varepsilon(x) \subseteq X$.

(a) Betrachten Sie das kartesische Produkt $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ versehen mit der Produkttopologie. Skizzieren Sie offene Mengen in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Bestimmen Sie eine Umgebungsbasis von $(0, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

(b) Es sei W das kartesische Produkt $W = [0, 1]^{\mathbb{R}}$. Elemente in W können mit Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $[0, 1]$ identifiziert werden. Sei nun $(f_i)_{i\in I}$ ein Netz in W mit $f_i : \mathbb{R} \to [0, 1]$. Zeigen Sie: Das Netz $(f_i)_{i\in I}$ konvergiert in der Produkttopologie gegen eine Funktion f genau dann, wenn $(f_i)_{i\in I}$ punktweise gegen f konvergiert.

(c) Sei $\mathcal{E}$ die Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{R}$, gerichtet durch Inklusion. Ferner sei für $E \subseteq \mathbb{R}$

$$\chi_E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\ \chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in E, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie: $(\chi_E)_{E\in\mathcal{E}}$ ist ein Netz in W mit $\lim\limits_{E\in\mathcal{E}} \chi_E = \chi_{\mathbb{R}}$ in der Produkttopologie.

(d) Zeigen Sie: Es gibt keine Teilfolge von $(\chi_E)_{E\in\mathcal{E}}$, die gegen $\chi_{\mathbb{R}}$ konvergiert.