Technische Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Prof. B. Kümmerer, WS 08/09

Funktionalanalysis 10. Übungsblatt 15. 01. 2009

ANWESENHEITSÜBUNGEN

Aufgabe A1: (Gegenbeispiel zu Banach Steinhaus)
Finden Sie ein „Gegenbeispiel" zum Satz von Banach-Steinhaus für den Fall, dass der Urbildraum kein Banachraum ist.

Aufgabe A2: (Komplementierbarer Teilraum)
Sei E ein Banachraum und $X \subseteq E$ ein abgeschlossener Teilraum. Zeigen Sie: Äquivalent sind:

a) Es existiert eine stetige lineare Abbildung $P : E \to E$ mit $P^2 = P$ und $P(E) = X$.

b) Es gibt einen abgeschlossenen linearen Teilraum $Y \subseteq E$ sodass die Abbildung

$$X \oplus_{l^1} Y \ni (x, y) \to x + y \in E$$

ein Homöomorphismus ist (d.h., bijektiv und in beide Richtungen stetig).

c) Es gibt einen abgeschlossenen linearen Teilraum $Y \subseteq E$ mit $X \cap Y = \{0\}$ und $X + Y = E$.

Aufgabe A3: (Beschränkte und unbeschränkte Operatoren)

a) Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Finden Sie einen unbeschränkten linearen Operator, der auf ganz $\mathcal{H}$ definiert ist.

b) Es sei (a_{ij}), $i, j \in \mathbb{N}$, eine hermitesche Matrix, sodass der Operator A mit

$$(Af)(i) := \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} f(j) \quad (i \in \mathbb{N})$$

jedes $f \in \ell^2(\mathbb{N})$ auf ein $Af \in \ell^2(\mathbb{N})$ abbildet. Zeigen Sie, dass A stetig ist.

Aufgabe A4: (Ein lineares Funktional kann viele Fortsetzungen besitzen)
Sei $(E, \|\cdot\|) := (\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_1)$, $M := \left\{ \begin{pmatrix} z \\ 0 \end{pmatrix} : z \in \mathbb{C} \right\} \subseteq \mathbb{C}^2$ und $f : M \ni \begin{pmatrix} z \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto z \in \mathbb{C}$.
Dann ist f ein lineares Funktional auf M mit $\| f \| = 1$.
Bestimmen Sie alle Fortsetzungen $F : E \to \mathbb{C}$ von f mit $\| F \| = 1$.

HAUSÜBUNGEN

Aufgabe H1: Ein Gegenbeispiel zu Fourierreihen
Zeigen Sie: Es gibt eine stetige periodische Funktion $f \in \mathcal{C}_{period}([0, 2\pi])$, deren Fourierreihe nicht überall punktweise gegen f konvergiert.

Hinweis: Betrachten Sie die linearen Funktionale

$$\varphi_n : (\mathcal{C}_{period}([0, 2\pi]), || \cdot ||_\infty) \ni f \mapsto (P_n f)(0) \ ,$$

wobei wie in der Vorlesung P_n die durch den Dirichletkern gegebene orthogonale Projektion auf den Raum der trigonometrischen Polynome bis zum Grad n sei. Was können Sie über die Normen der φ_n für $n \to \infty$ sagen?