Funktionalanalysis   1. Übungsblatt   22.10.2008

ANWESENHEITSÜBUNGEN

Aufgabe A1: (Zur Motivation für die Funktionalanalysis)
Sei $A : \mathcal{C}^\infty([0,1]) \to \mathcal{C}^\infty([0,1]) : f \mapsto f'$ der Ableitungsoperator.

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenfunktionen von A.

(b) Was ist $(e^{At}f)(x)$, wenn man e^{At} formal in eine Potenzreihe entwickelt? Welchen klassischen Satz aus der Analysis erkennen Sie? Warum ist das nicht befriedigend?

Aufgabe A2: (XXX-Vektorräume: Wie macht man eine Definition?)
Wie würden Sie metrische Vektorräume und topologische Vektorräume definieren?

Aufgabe A3: (Einige Normen auf $\mathbb{K}^n$)
Sei $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{K}^n$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Wir betrachten auf $\mathbb{K}^n$ die Funktionen

$$||z||_p := \left(\sum_{k=1}^{n} |z_k|^p \right)^{1/p} , \ 0 \le p < \infty , \quad \text{und} \quad ||z||_\infty := \max\{|z_i| : i = 1, \ldots, n\} .$$

1. Skizzieren Sie einige „Einheitskugeln“ $E_1^p := \{z \in \mathbb{R}^2 : ||z||_p \le 1\}$ für einige charakteristische Werte von p (für welche Werte von p ist das besonders einfach?). Für welche Werte von p ist $|| \cdot ||_p$ sicher keine Norm?

2. Zeigen Sie: $\lim_{p\to\infty} ||z||_p = ||z||_\infty$ für alle $z \in \mathbb{C}^n$.

3. Für $\alpha > 0$ sei $H_\alpha \subseteq \mathbb{R}^2$ der von $\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ erzeugte lineare Teilraum.

   Betrachten Sie den Quotientenraum $\mathbb{R}^2/H_\alpha$ von $(\mathbb{R}^2, ||\cdot||_p)$ für $p = 1, 2, \infty$. Natürlich ist dieser Quotientenraum eindimensional. Mit welchem eindimensionalen Teilraum von $\mathbb{R}^2$ und welcher Norm auf diesem Teilraum würden Sie den Quotienten auf natürliche Weise identifizieren?

Aufgabe A4: (Summe von Banachräumen)
Gegeben seien zwei Banachräume $(E, \| \cdot \|_1)$ und $(F, \| \cdot \|_2)$.
Zeigen Sie: Für $1 \le p \le \infty$ ist $(E \bigoplus F, \| \cdot \|_p)$ ein Banachraum, wobei $\|x \oplus y\|_p := (\|x\|_1^p + \|y\|_2^p)^{1/p}$ für $1 \le p < \infty$ bzw. $\|x \oplus y\|_\infty := \max\{\|x\|_1, \|y\|_2\}$ ist.

HAUSÜBUNGEN

Aufgabe H1: (**Äquivalente Topologien**)
Sei $(E, ||\cdot||)$ ein normierter Raum. Eine Menge $A \subseteq E$ ist (nach Definition) genau dann offen, wenn für jeden Punkt $x \in A$ ein $r > 0$ existiert mit $K_r(x) \subseteq A$.
Zeigen Sie: Seien $||\cdot||_1$ und $||\cdot||_2$ zwei Normen auf E dann sind äquivalent:

a) $(E, ||\cdot||_1)$ und $(E, ||\cdot||_2)$ haben dieselben offenen Mengen.

b) Es gibt Konstanten $C > 0$ und $D > 0$ mit $C||x||_1 \leq ||x||_2 \leq D||x||_1$ für alle $x \in E$.

Aufgabe H2: (Umgang mit Metriken)

(a) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass der Raum (X, d_1) mit

$$d_1(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

ebenfalls ein metrischer Raum ist.

(b) Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ und d eine beliebige Metrik auf X. Weisen Sie nach, dass auf X keine Norm $\|\cdot\|$ mit der Eigenschaft $\|x - y\| = d_1(x, y)$ für alle $x, y \in X$ existiert.

(c) Gegeben sei die Metrik $d_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mit $d_2(x, y) := |\arctan(x) - \arctan(y)|$. Weiterhin sei auf $\mathbb{R}$ die Metrik $d_3(x, y) := |x - y|$ gegeben. Zeigen Sie, dass die identische Abbildung $id : (\mathbb{R}, d_2) \to (\mathbb{R}, d_3)$ zwar stetig, aber nicht gleichmäßig stetig ist.
(Hinweis: Ist jede Cauchy-Folge bezüglich d_2 auch automatisch eine Cauchy-Folge bezüglich d_3?)