Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
M. Slassi
M. Fuchssteiner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2008/2009
15. Dezember 2008

8. Übungsblatt zur „Mathematik I für BI, WI(BI), MaWi, AngGeo und UI“

Gruppenübung

Aufgabe G1 ()

(a) Bestimmen Sie ein Polynom f vom Grad $n \leq 3$ mit $f(x_i) = y_i$ für $i = 0, \ldots, 3$, wobei

i	0	1	2	3
x_i	0	1	2	-1
y_i	1	1	3	-3

(b) Berechnen Sie die Koeffizienten des Interpolationspolynoms aus (a) in der Darstellung

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3.$$

(c) Berechnen Sie für das Polynom $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $p(x) = x^2 - 12345678x - 12345678$ für $x \in D(p) = \mathbb{R}$ den Wert $p(12345679)$

(i) mit dem Taschenrechner, (ii) mit dem Hornerschema.

Welcher Wert ist der richtige? Was ist passiert?

Lösung:

(a) Ansatz: $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-0) + \alpha_2(x-0)(x-1) + \alpha_3(x-0)(x-1)(x-2)$

$$\begin{aligned} f(0) = \alpha_0 &\overset{!}{=} 1 \quad \Rightarrow \alpha_0 = 1 \\ f(1) = 1 + \alpha_1 &\overset{!}{=} 1 \quad \Rightarrow \alpha_1 = 0 \\ f(2) = 1 + 2\alpha_2 &\overset{!}{=} 3 \quad \Rightarrow \alpha_2 = 1 \\ f(-1) = 1 + 2 - 6\alpha_3 &\overset{!}{=} -3 \quad \Rightarrow \alpha_3 = 1 \end{aligned}$$

Ergebnis: $f(x) = 1 + x(x-1) + x(x-1)(x-2)$.

(b) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$

(c) (i) $p(12345679) = 24691357$, (ii) $p(12345679) = 1$
Der Wert in (ii) ist der richtige. Offenbar führen Rundungsfehler des Taschenrechners zu dem falschen Ergebnis.

Aufgabe G2 ()

Bestimmen Sie für die folgenden Mengen $M_i \subseteq \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, 4$ die Menge der Häufungspunkte $H(M_i)$, $i = 1, \ldots, 4$.

$$M_1 =]2, 3[, \quad M_2 = \{1, 7, 10, 11\}, \quad M_3 = \mathbb{R} \setminus ([2, 3] \cup [-1, 0]), \quad M_4 = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Gibt es eine Teilmengenbeziehung zwischen einer Menge M und $H(M)$?

Lösung:

$$H(M_1) = [2, 3], \quad H(M_2) = \emptyset, \quad H(M_3) = \mathbb{R} \setminus (]2, 3[\cup] - 1, 0[), \quad H(M_4) = \{0\}$$

Im Allgemeinen besteht keine Teilmengenbeziehung zwischen M und $H(M)$.

Aufgabe G3 ()

(a) Zeigen Sie, dass jede Zahl $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ein Häufungspunkt der Menge $\mathbb{Q}$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass jede Zahl $x \in \mathbb{Q}$ ein Häufungspunkt der Menge $\mathbb{Q}$ ist. Überlegen Sie zunächst, ob Sie hierfür auch den Hinweis benutzen können. Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis: Verwenden Sie ohne Beweis, dass für jede reelle Zahl x und jedes $\varepsilon > 0$ das Intervall $[x - \varepsilon, x + \varepsilon]$ eine rationale Zahl enthält.

Lösung:

(a) Sei $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
Behauptung: x ist Häufungspunkt von $\mathbb{Q}$.
z. z. $\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Q} : \lim_{n \to \infty} x_n = x$.
Beweis: Nach Hinweis existiert zu $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ eine rationale Zahl $q_n \in [x - \varepsilon_n, x + \varepsilon_n]$. Beachte, dass $q_n \neq x$, da $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
Sei nun $\varepsilon > 0$ bel., dann existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\varepsilon_{n_0} = \frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Es gilt

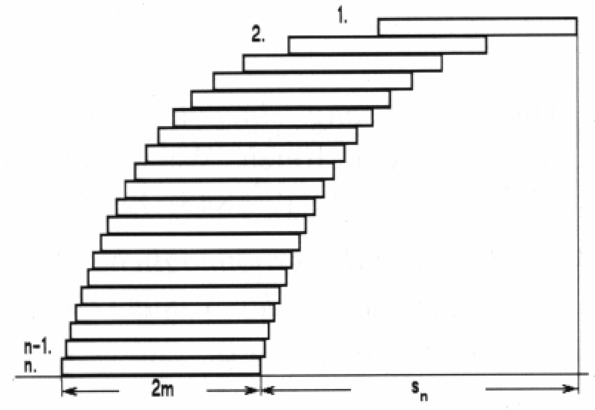
$$|q_n - x| \leq \varepsilon_n = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon, \quad n \geq n_0,$$

d.h. $\lim_{n \to \infty} q_n = x$.

(b) Der Hinweis lässt sich nicht verwenden, da für $x \in \mathbb{Q}$ zwar eine rationale Zahl $q \in [x - \varepsilon_n, x + \varepsilon_n]$ existiert, $x \neq q$ aber nicht klar ist.
Sei $x \in \mathbb{Q}$.
Behauptung: x ist Häufungspunkt von Q.
z. z. $\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Q} : \lim_{n \to \infty} x_n = x$
Beweis:Wähle $x_n = x + \frac{1}{n} \in \mathbb{Q}$. Dann gilt $x_n \neq x$ und $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ (nach Rechenregeln).

Aufgabe G4 ()

Mit n gleich großen, übereinandergestapelten Betonplatten der Länge 2m soll eine Brücke gebaut werden. Da in der heutigen Zeit Betonplatten sehr teuer sind, sollen die Platten jeweils nach einer Seite so weit wie möglich verschoben werden, ohne dass diese umkippen. Hierzu nummeriere man die Platten von oben nach unten und berechne über die Rechenregeln für Schwerpunkte die maximale Verschiebung s_n. Was ergibt sich für s_n für $n \to \infty$? Welche Strecke kann man also überbrücken?



Lösung: Der Schwerpunkt einer Platte liegt in der Mitte. Daher kann die erste Platte zur Hälfte über die zweite hinausragen, d.h. $s_2 = 1$. Der gemeinsame Schwerpunkt der 1. und 2. Platte liegt bei 1.5, d.h. $s_3 = 1.5$. Allgemein liegt der gemeinsame Schwerpunkt der ersten n Platten bei $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$, d.h. $s_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$. Obwohl s_n sehr langsam wächst ($s_{11} \approx 2.9$, $s_{101} \approx 7.5$, $s_{10^{44}} \approx 101.9$), gilt $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$ (siehe Arbeitsbuch 14 (45)), d.h. wir können beliebig große Strecken überbrücken.

Hausübung

Aufgabe H1 (8 Punkte)

Die größte mögliche Belastung B einer eisernen Kette mit Kettenglieddurchmesser d wurde für einige Werte von d ermittelt:

d(mm)	6	8	16	20
B(kg)	225	400	1600	2500

Bestimmen Sie ein Polynom vom Grad $n \leq 3$, das die Interpolationsbedingung zu diesen Daten erfüllt.
Weitere Messwerte sind

d(mm)	11	13	18	25	30
B(kg)	750	1050	2000	3900	5600

Berechnen Sie die durch Ihr Interpolationspolynom an diesen Stellen gegebenen Werte und vergleichen Sie diese.

Lösung: Ansatz:$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-6) + \alpha_2(x-6)(x-8) + \alpha_3(x-6)(x-8)(x-16)$

$$\begin{aligned}
f(6) = \alpha_0 &\overset{!}{=} 225 \quad \Rightarrow \alpha_0 = 225\\
f(8) = 225 + 2\alpha_1 &\overset{!}{=} 1 \quad \Rightarrow \alpha_1 = \tfrac{175}{2}\\
f(16) = 225 + 875 + 80\alpha_2 &\overset{!}{=} 1600 \quad \Rightarrow \alpha_2 = \tfrac{25}{4}\\
f(20) = 225 + 1225 + 1050 - 672\alpha_3 &\overset{!}{=} 2500 \quad \Rightarrow \alpha_3 = 0
\end{aligned}$$

Ergebnis: $f(x) = 225 + \frac{175}{2}(x-6) + \frac{25}{4}(x-6)(x-8)$
Damit ergibt sich:

$$f(11) = 756\frac{1}{4}, \quad f(13) = 1056\frac{1}{4}, \quad f(18) = 2025, \quad f(25) = 3906\frac{1}{4}, \quad h(30) = 5625.$$

Man sieht, dass das Interpolationspolynom die Stellen gut approximiert.

Aufgabe H2 (14 Punkte)

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{3(x^2-1)}{x^5 + 5x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 7x - 3}.$$

(a) Bestimmen Sie $D(f)$.

(b) Bestimmen Sie für alle $z \in \mathbb{R}$ die Ausdrücke $\lim_{x\to z+} f(x)$, $\lim_{x\to z-} f(x)$ und $\lim_{x\to z} f(x)$, soweit diese existieren. Bestimmen Sie außerdem $\lim_{x\to\infty} f(x)$ und $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, sofern existent.

Lösung: Es sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = 3(x^2-1)$ für $x \in D(f) = \mathbb{R}$ und $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h(x) = x^5 + 5x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 7x - 3$ für $x \in D(h) = \mathbb{R}$ Dann gilt (Vorgehensweise wie in H1 auf dem 5. Übungsblatt):

$$g(x) = 3(x-1)(x+1), \quad h(x) := (x+1)^3(x-1)(x+3).$$

(a) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-3, -1, 1\}$.

(b) Fall 1: $z \in D(f)$

Da $g(z) \neq 0$, $\lim_{x\to z} g(x) = g(z)$ und $\lim_{x\to z} h(x) = h(z)$, folgt mit den Rechenregeln für Grenzwerte

$$\lim_{x\to z} f(x) = \frac{\lim\limits_{x\to z} g(x)}{\lim\limits_{x\to z} h(x)} = \frac{g(z)}{h(z)} = f(z).$$

und

$$\lim_{x\to z^+} f(x) = \lim_{x\to z^-} f(x) = \lim_{x\to z} f(x) = f(z).$$

Fall 2: $z = 1$

Da $(z+1)^3(z+3) \neq 0$ und $\lim_{x\to z}(x+1)^3(x+3) = (z+1)^3(z+3)$, folgt mit den Rechenregeln für Grenzwerte

$$\lim_{x\to z} f(x) = \lim_{x\to z} \frac{3}{(x+1)^2(x+3)} = \frac{3}{\lim\limits_{x\to z}(x+1)^2(x+3)} = \frac{3}{16}$$

und

$$\lim_{x\to z^+} f(x) = \lim_{x\to z^-} f(x) = \lim_{x\to z} f(x) = \frac{3}{16}.$$

Fall 3: $z = -1$

Sei $K > 1$ und $\varepsilon = 1/\sqrt{K}$. Dann gilt

$$f(x) \geq \frac{3}{\varepsilon^2 3} = K, \quad x \in [-1-\varepsilon, -1+\varepsilon] \setminus \{-1\},$$

d.h.

$$\lim_{x\to z^+} f(x) = \lim_{x\to z^-} f(x) = \lim_{x\to z} f(x) = \infty.$$

Fall 4: $z = -3$

Sei $K > 1$ und $\varepsilon = 1/(3K)$. Dann gilt

$$f(x) \geq \frac{3}{9}\varepsilon = K, \quad x \in]-3, -3+\varepsilon],$$

d.h.

$$\lim_{x\to z^+} f(x) = \infty.$$

Außerdem gilt

$$f(x) \leq \frac{3}{9}\varepsilon = -K, \quad x \in [-3-\varepsilon, -3[,$$

d.h.

$$\lim_{x\to z^-} f(x) = -\infty.$$

Insbesondere existiert $\lim_{x\to z} f(x)$ nicht.

Fall 5: $z = \pm\infty$

Es gilt

$$\left|\frac{3}{(x+1)^2(x+3)}\right| \leq \frac{3}{x^2}, \quad |x| > 4.$$

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$. Zu $\epsilon > 0$ wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $x_n > \sqrt{3/\varepsilon}$. Dann gilt

$$\left|\frac{3}{(x_n+1)^2(x_n+3)}\right| \leq \frac{3}{x_n^2} \leq \varepsilon, \quad n \geq n_0,$$

d.h. $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Analog folgt $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

Aufgabe H3 (4 Punkte)

Es seien $(n+1)$ Punkte $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, $i = 0, \ldots, n$, mit paarweise verschiedenen x_i gegeben. Dann gibt es

[( )] kein Polynom
[( )] genau ein Polynom
[( )] unendlich viele Polynome

vom Grad $n+1$, welche der Interpolationsbedingung genügen. Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung: Es gibt unendliche viele Polynome, denn nach Vorlesung existiert zu $n+2$ Punkten genau ein Polynom vom Grad $n+1$, welches der Interpolationsbedingung genügt. Daher können wir zu x_{n+1} (beliebig, aber verschieden von $x_0, \ldots, x_n$) einen beliebigen Wert $y_{n+1} \in \mathbb{R}$ vorgeben und erhalten ein Polynome vom Grad $n+1$, welches der Interpolationsbedingung für (x_i, y_i), $i = 0, \ldots, n+1$, genügt. Insbesondere genügt dieses Polynom auch der Interpolationsbedingung für (x_i, y_i), $i = 0, \ldots, n$.