Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
M. Slassi
M. Fuchssteiner

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2008/2009
5. Dezember 2008

7. Übungsblatt zur „Mathematik I für BI, WI(BI), MaWi, AngGeo und UI“

Gruppenübung

Aufgabe G1 ()

Für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ sei

$$S_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } S_{a,b}(y) = ay + b \text{ für } y \in D(S_{a,b}) = \mathbb{R},$$
$$T_{c,d} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } T_{c,d}(x) = cx + d \text{ für } x \in D(T_{c,d}) = \mathbb{R}.$$

Betrachten Sie die Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } f(x) = 3x^2 - 12x + 13 \text{ für } x \in D(f) = \mathbb{R},$$
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } g(x) = x^2 \text{ für } x \in D(g) = \mathbb{R}.$$

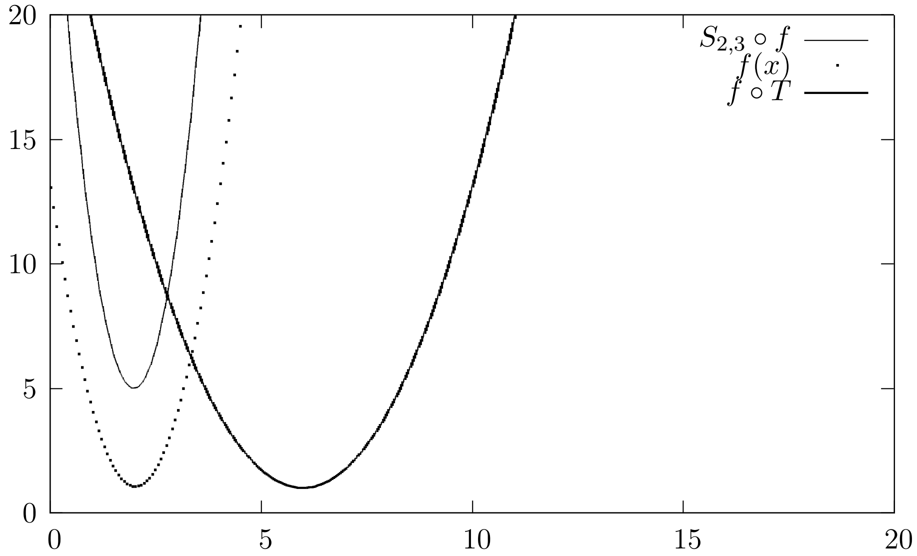
(a) Bestimmen Sie die Funktionen $S_{2,3} \circ f$ und $f \circ T_{\frac{1}{2},-1}$ und geben Sie deren Definitionsbereich an (ohne Beweis). Skizzieren Sie f, $S_{2,3} \circ f$ und $f \circ T_{\frac{1}{2},-1}$.

(b) Beschreiben Sie anschaulich die Wirkung der Parameter a, b, c und d bei $S_{a,b} \circ f$ bzw. $f \circ T_{c,d}$.

(c) Bestimmen Sie a, b, c und d so, dass $S_{a,b} \circ f \circ T_{c,d} = g$ gilt.

Lösung:

(a) $S_{2,3} \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $(S_{2,3} \circ f)(x) = 6(x-2)^2 + 5$ für $x \in D(S_{2,3} \circ f) = \mathbb{R}$ und $f \circ T_{\frac{1}{2},-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $(f \circ T)(x) = \frac{3}{4}(x-6)^2 + 1$ für $x \in D(f \circ T_{\frac{1}{2},-1}) = \mathbb{R}$.



(b) Der Parameter a bzw. b bewirkt eine Stauchung/Streckung bzw. Verschiebung der Funktion f entlang der y-Achse. Analog bewirkt der Parameter c bzw. d eine Stauchung/Streckung bzw. eine Verschiebung der Funktion f entlang der x-Achse.

(c) Wählen Sie $a = \frac{1}{3}$, $b = -\frac{1}{3}$, $c = 1$ und $d = 2$.

Aufgabe G2 ()

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Die Summe zweier monoton wachsender Funktionen ist monoton wachsend.

(b) Das Produkt zweier monoton wachsender Funktionen ist monoton wachsend.

Lösung:

(a) Behauptung: Die Summe zweier monoton wachsender Funktionen ist monoton wachsend.
Beweis: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend. Beachte $f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt den Definitionsbereich $D(f + g) = D(f) \cap D(g)$. Nach Definition gilt

$$\forall x, y \in D(f) : x \le y \Rightarrow f(x) \le f(y) \tag{1}$$
$$\forall x, y \in D(g) : x \le y \Rightarrow g(x) \le g(y) \tag{2}$$

Daher folgt

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \overset{(1)}{\le} f(y) + g(x) \overset{(2)}{\le} f(y) + g(y) = (f + g)(y)$$

für $x, y \in D(f + g)$ mit $x \le y$, d.h. $f + g$ ist monoton wachsend.

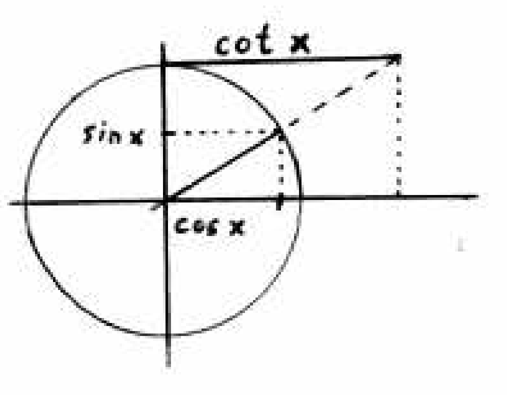
(b) Die Behauptung ist falsch, da $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$ für $x \in D(f) = \mathbb{R}$ monoton wächst, $f \cdot f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $(f \cdot f)(x) = x^2$ für $x \in D(f)$ aber nicht.

Aufgabe G3 ()

Veranschaulichen Sie die Funktion

$$\cot : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \text{ für } x \in D(\cot) = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

am Einheitskreis.



Lösung:

Hausübung

Aufgabe H1 (11 Punkte)
Es sei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x - 3 \text{ für } x \in D(f) = \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie $f(0)$ und mit Hilfe des Horner-Schemas die Werte $f(1)$, $f(2)$ und $f(3)$. Raten Sie nun eine Nullstelle des Polynoms und geben Sie die reelle Faktorisierung von f mit Hilfe des Horner-Schemas an.

Lösung:

(a) $x_0 = 0$.
Es gilt: $f(x_0) = -3$.

(b) $x_1 = 1$

$$\begin{array}{rrrrr} & 2 & -3 & 2 & -3 \\ + & 0 & 2 & -1 & 1 \\ \hline & 2 & -1 & 1 & -2 \end{array}$$

Also: $f(x_1) = -2$.

(c) $x_2 = 2$

$$\begin{array}{rrrrr} & 2 & -3 & 2 & -3 \\ + & 0 & 4 & 2 & 8 \\ \hline & 2 & 1 & 4 & 5 \end{array}$$

Also: $f(x_2) = 5$.

(d) $x_3 = 3$

$$\begin{array}{rrrrr} & 2 & -3 & 2 & -3 \\ + & 0 & 6 & 9 & 33 \\ \hline & 2 & 3 & 11 & 30 \end{array}$$

Also: $f(x_3) = 30$.

(e) Raten $x_4 = \frac{3}{2}$

$$\begin{array}{rrrrr} & 2 & -3 & 2 & -3 \\ + & 0 & 3 & 0 & 3 \\ \hline & 2 & 0 & 2 & 0 \end{array}$$

Also: $f(x) = (x - \frac{3}{2})(2x^2 + 2)$. Da $2x^2 + 2$ keine Nullstelle in $\mathbb{R}$ besitzt, ist dies die gesuchte Faktorisierung.

Aufgabe H2 (11 Punkte)

(a) Geben Sie jeweils drei Beispiele für Funktionen an, die gerade bzw. ungerade sind (ohne Beweis).

(b) Ist folgende Funktion gerade oder ungerade oder keines von beidem (Beweis!)?

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } f(x) = \frac{1}{x}\sin(x) \text{ für } x \in D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

(c) Geben Sie drei Intervalle an, in denen die Funktion f aus (b) (streng) monoton wächst bzw fällt (ohne Beweis).

Lösung:

(a) Folgenden Funktionen sind gerade:

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } f(x) = x^2 \text{ für } x \in D(f) = \mathbb{R} \\ g &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } g(x) = \cos(x) \text{ für } x \in D(g) = \mathbb{R} \\ h &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } h(x) = \exp(x^2) \text{ für } x \in D(h) = \mathbb{R} \end{aligned}$$

Folgende Funktionen sind ungerade:

$$\begin{aligned} i &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } i(x) = x^5 \text{ für } x \in D(i) = \mathbb{R} \\ j &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } j(x) = \sin(x) \text{ für } x \in D(j) = \mathbb{R} \\ k &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } k(x) = \sin(x^3) \text{ für } x \in D(k) = \mathbb{R} \end{aligned}$$

(b) <u>Behauptung</u>: Die Funktion f ist gerade.
<u>Beweis</u>: Sei $x \in D(f)$ (mit $-x \in D(f)$). Dann gilt

$$f(x) = \frac{1}{x}\sin(x) = \frac{-1}{-x}\sin(x) = \frac{-1}{-x}(-\sin(-x)) = \frac{1}{-x}\sin(-x) = f(-x),$$

d.h. die Funktion f ist gerade.

(c) $f|_{[\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi]}$ ist monoton fallend, $f|_{[-\frac{3}{2}\pi,-\frac{\pi}{2}]}$ ist monoton wachsend und $f|_{[\frac{5}{2}\pi,\frac{7}{2}\pi]}$ ist monoton fallend.

Aufgabe H3 (4 Punkte)

Bestimmen Sie alle ungeraden Polynome 3. Grades (Beweis!).

Lösung: Behauptung: Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \text{ für } x \in D(f) = \mathbb{R}$$

ist genau dann ungerade, wenn $b = d = 0$.
Beweis:
„$\Leftarrow$“: Es gilt

$$f(x) = ax^3 + cx = -a(-x)^3 - (-cx) = -(a(-x)^3 + c(-x)) = -f(-x)$$

für alle $x \in D(f)$ (mit $-x \in D(f)$), d.h f ist ungerade.
„$\Rightarrow$“: Es gelte $f(x) = -f(-x)$ für alle $x \in D(f)$ (mit $-x \in D(f)$), d.h. $f(x) + f(-x) = 0$ für alle $x \in D(f)$. Damit folgt:

$$0 = f(x) + f(-x) = ax^3 + bx^2 + cx + d - ax^3 + bx^2 - cx + d = 2bx^2 + 2d.$$

für alle $x \in D(f)$. Laut Vorlesung (siehe Beweis in Kapitel 2 zum 17. Satz (Koeffizientenvergleich)) folgt damit $b = d = 0$.