Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
M. Slassi
M. Fuchssteiner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2008/2009
28. November 2008

6. Übungsblatt zur „Mathematik I für BI, WI(BI), MaWi, AngGeo und UI“

Gruppenübung

Aufgabe G1 ()

Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$, (ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4^n}{n!}$, (iii) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+n+2}{4n^3+1}$,

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$, (v) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right)$.

Hinweis zu (v): $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$.

Lösung: (i) Es gilt

$$0\le\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\le\frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Da $\lim_{n\to\infty}0=0$ und gemäß Rechenregeln $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$, folgt aus dem Einschließungskriterium $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=0$.

(ii) Es gilt $0\le\frac{4^n}{n!}\le\frac{43}{n}$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Aus dem Einschließungskriterium folgt $\lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{n!}=0$.

(iii) Es gilt

$$0\le\frac{n^2+n+2}{4n^3+1}\le\frac{n^2+n+2}{4n^3}=\frac{1}{4n}+\frac{1}{4n^2}+\frac{1}{2n^3}.$$

Aus den Rechenregeln für konvergente Folgen und dem Einschließungskriterium folgt $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n+2}{4n^3+1}=0$.

(iv) Es gilt gemäß Vorlesung

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}.$$

Es folgt mit den Rechenregeln für konvergente Folgen $\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\frac{1}{2}$.

(v) Mit dem Hinweis ergibt sich

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}.$$

Mit den Rechenregeln für konvergente Folgen erhält man $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right)=1$.

Aufgabe G2 ()

(a) Zeigen Sie: Für $x, y \geq 0$ gilt
$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}.$$

(b) Es sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit $\lim_{n\to\infty} c_n = c$. Beweisen Sie mit Hilfe von (a) die folgende Aussage aus der Vorlesung.

Falls ein $m \in \mathbb{N}$ existiert mit $c_n \geq 0$ für alle $n \geq m$,
so konvergiert $(\sqrt{c_n})_{n\geq m}$ mit $\lim_{n\to\infty} \sqrt{c_n} = \sqrt{c}$.

Lösung:

(a) Fallunterscheidung:
Fall 1: $x \geq y$. Es gilt

$$\begin{aligned}
& \sqrt{x}\sqrt{y} && \geq y \\
\iff\ & x - 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y && \leq x - y \\
\iff\ & (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 && \leq x - y \\
\overset{x\geq y}{\iff}\ & \sqrt{x} - \sqrt{y} && \leq \sqrt{x - y}.
\end{aligned}$$

Fall 2: $x < y$. Zeige $\sqrt{y} - \sqrt{x} \leq \sqrt{y - x}$.

(b) Nach Voraussetzung existiert für $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass $|c_n - c| < \varepsilon$ für alle $n \geq N(\varepsilon)$. Wähle $N'(\varepsilon) = N(\varepsilon^2)$. Dann gilt $\sqrt{|c_n - c|} < \varepsilon$ für alle $n \geq N'(\varepsilon)$. Nach (a) gilt zudem $\varepsilon > \sqrt{|c_n - c|} \geq |\sqrt{c_n} - \sqrt{c}|$. Aus der Definition der Konvergenz folgt die Behauptung.

Aufgabe G3 ()

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. Geben Sie für falsche Aussagen jeweils ein Gegenbeispiel an.

(a) Jede Nullfolge ist konvergent.

(b) Jede konvergente Folge ist monoton.

(c) Eine Folge, welche monoton und beschränkt ist, ist konvergent.

(d) Jede beschränkte Folge konvergiert gegen 0.

(e) Jede monoton wachsende Folge ist divergent.

(f) Jede divergente Folge ist monoton.

(g) Die Summe zweier konvergenter Folgen konvergiert.

Lösung:

(a) Wahr.

(b) Falsch. Gegenbeispiel: $c_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

(c) Wahr.

(d) Falsch. Gegenbeispiel: $c_n = 1$.

(e) Falsch. Gegenbeispiel: $c_n = -\frac{1}{n}$.

(f) Falsch. Gegenbeispiel: $c_n = (-1)^n$.

(g) Wahr.

Hausübung

Aufgabe H1 (8 Punkte)

Berechnen Sie folgende Grenzwerte:
(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+2^2+\cdots+n^2}{n^3}$, (ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$, (iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{9n^2+2n+1}-3n\right)$, (iv) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2-n+4n^2}{n+2n^2+2n^4}$.

Lösung: (i) Es gilt

$$\frac{1+2^2+\cdots+n^2}{n^3} = \frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{n^3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}.$$

Aus den Rechenregeln für konvergente Folgen folgt $\lim_{n\to\infty} \frac{1+2^2+\cdots+n^2}{n^3} = \frac{1}{3}$.
(ii) Es gilt $0 \leq \frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{n}$. Da gemäß Vorlesung $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, folgt mit dem Einschließungskriterium $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.
(iii) Es gilt

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{9n^2+2n+1}-3n\right) &= \frac{(\sqrt{9n^2+2n+1}-3n)(\sqrt{9n^2+2n+1}+3n)}{\sqrt{9n^2+2n+1}+3n} \\ &= \frac{2}{\sqrt{9+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}+3} + \frac{1}{\sqrt{9n^2+2n+1}+3n}\end{aligned}$$

Es folgt mit der Monotonie der Wurzelfunktion, dem Einschließungskriterium und den Rechenregeln für konvergente Folgen $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{9n^2+2n+1}-3n\right) = \frac{1}{3}$.
(iv) Es gilt

$$0 \leq \frac{2-n+4n^2}{n+2n^2+2n^4} \leq \frac{2-n+4n^2}{2n^4} = \frac{1}{n^4} - \frac{1}{2n^3} + \frac{2}{n^2}.$$

Aus den Rechenregeln für konvergente Folgen und dem Einschließungskriterium folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2-n+4n^2}{n+2n^2+2n^4} = 0$.

Aufgabe H2 (5 Punkte)

Es bezeichne $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge. Betrachten Sie die folgende Aussage:

$$\lim_{n\to\infty} c_n > 0 \iff \exists m \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq m : c_n > 0.$$

Entscheiden Sie für beide Implikationen, ob sie wahr oder falsch sind, und geben Sie gegebenenfalls ein Gegenbeispiel an.

Lösung: „$\Rightarrow$": Wahr. Es Sei $c = \lim_{n\to\infty} c_n$. Es existiert ein $N(\frac{c}{2}) \in \mathbb{N}$, so dass $|c_n - c| < \frac{c}{2}$ für alle $n \geq N(\frac{c}{2})$. Da nach Voraussetzung $c > 0$, gilt $c_n > \frac{c}{2} > 0$ für alle $n \geq N(\frac{c}{2})$.
„$\Leftarrow$": Falsch. Gegenbeispiel: $c_n = \frac{1}{n}$. Dann gilt $c_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, aber $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$.

Aufgabe H3 (10 Punkte)

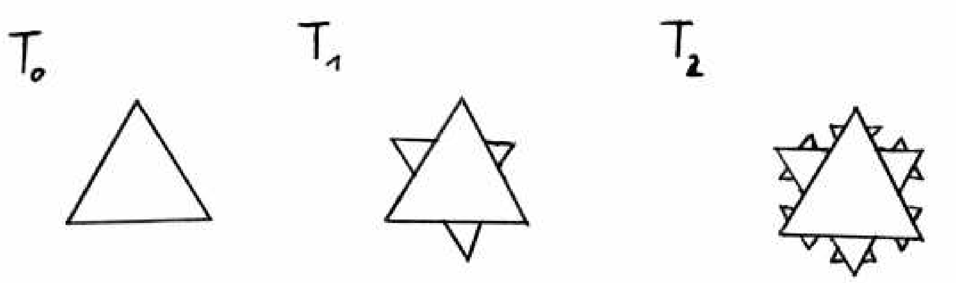
Betrachten Sie ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge a. Wir nennen diese Figur T_0. Daraus bilden sich rekursiv die Figuren $T_1, T_2, \ldots, T_n, \ldots$ nach folgendem Gesetz: *Ersetze jedes geradlinige Berandungsstück durch vier Strecken, indem über dem mittleren Drittel ein gleichseitiges Dreieck aufgesetzt wird.*

(a) Veranschaulichen Sie sich die obige Konstruktion, indem Sie die Figuren T_0, T_1, und T_2 skizzieren.

(b) Stellen Sie Rekursionsformeln zur Darstellung des Flächeninhalts und des Umfangs der Figur T_n auf.

(c) Untersuchen Sie die Formeln für Flächeninhalt und Umfang auf Konvergenz in n und berechnen Sie gegebenfalls den Grenzwert.

Lösung:



(a)

(b) Es bezeichne A_n den Flächeninhalt der Figur T_n und Δ_n den Flächeninhalt eines der zuletzt aufgesetzten Dreiecke. Dann gilt $\Delta_n = \frac{1}{9}\Delta_{n-1} = \cdots = (\frac{1}{9})^n \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$. In jedem Schritt entstehen aus einer Berandungsfläche vier neue Berandungsflächen, an die jeweils wieder Dreiecke angebaut werden. Im n-ten Schritt werden also $4^{i-1} \cdot 3$ Dreiecke angebaut. Für den Flächeninhalt A_n ergibt sich damit $A_n = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + \sum_{i=0}^{n-1} \left(4^i \cdot 3 \cdot (\frac{1}{9})^{i+1} \frac{\sqrt{3}}{4}\right) a^2 = \left(1 + \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{n-1} (\frac{4}{9})^i\right) \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.
Für den Umfang gilt $U_n = \frac{4}{3} \cdot U_{n-1} = \cdots = (\frac{4}{3})^n \cdot U_0 = (\frac{4}{3})^n \cdot 3a$.

(c) Da $\lim_{n\to\infty}(\frac{4}{9})^n = 0$, konvergiert gemäß Aufgabe G2 auf Übungsblatt 1 der Flächeninhalt mit $\lim_{n\to\infty} A_n = \left(1 + \frac{1}{3}\frac{9}{9-4}\right) \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{2}{5}\sqrt{3}a^2$.
Da $\frac{4}{3} > 1$, ist die Folge $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt. Damit divergiert die Folge der Umfänge von T_n.