Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
M. Slassi
M. Fuchssteiner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2008/2009
21. November 2008

5. Übungsblatt zur „Mathematik I für BI, WI(BI), MaWi, AngGeo und UI“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Beschränktheit von Folgen)

Untersuchen Sie die Folgen auf Beschränktheit.

(a) $c_n = c_0 \cdot q^n$, wobei $c_0, q \in \mathbb{R}$ und $n \geq 1$,

(b) $e_0 = 1$ und $e_{n+1} = (n+1)e_n$ für $n \geq 0$,

(c) $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ und $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ für $n \geq 1$.

Was können Sie über die Konvergenz der Folgen auf Grund ihrer Beschränktheit bzw. Unbeschränktheit aussagen?

Hinweis zu (b): Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $e_n \geq n$ für alle $n \geq 1$ gilt.

Lösung: (a) 1. Fall: $c_0 = 0$. Die Folge $(c_n)_{n\geq 0}$ ist konstant 0. Da 0 eine untere und eine obere Schranke von $(c_n)_{n\geq 0}$ ist, ist die Folge beschränkt.

Wir nehmen im Folgenden an, dass $c_0 \neq 0$ gilt.

2. Fall: $|q| \leq 1$. Dann ist $|c_n| = |c_0||q|^n \leq |c_0|$ für alle $n \in \mathbb{N}$, insbesondere ist die Folge beschränkt.

3. Fall: $|q| > 1$. Wir wenden die Bernoullische Ungleichung auf $|q| - 1$ an und erhalten

$$|c_0 q^n| = |c_0||q|^n \geq |c_0|(1 + n(|q| - 1)).$$

Behauptung: $(|c_0|(1 + n(|q| - 1)))_{n\geq 1}$ ist unbeschränkt.

Annahme: $(|c_0|(1 + n(|q| - 1)))_{n\geq 1}$ ist nach oben beschränkt, d. h. es existiert ein $K \in \mathbb{R}$ mit $|c_0|(1 + n(|q| - 1)) \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis: Nach Annahme wäre

$$n \leq \frac{\frac{K}{|c_0|} - 1}{|q| - 1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, was aber nicht sein kann. Damit kann $(c_n)_{n\geq 0}$ nicht beschränkt sein.

(b) Wir zeigen zuerst den Hinweis:

Behauptung: Es gilt $e_n \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis: Für den Beweis wenden wir die vollständige Induktion an.

IA: Betrachte $n = 1$. Dann erhalten wir $e_1 = 2 \geq 1$. Die Aussage ist also für $n = 1$ wahr.

IS: Für $n \in \mathbb{N}$ gelte $e_n \geq n$ (IV).

Behauptung:

$$e_{n+1} \geq n + 1$$

Beweis:

$$e_{n+1} = (n+1)e_n \overset{\text{(IV)}}{\geq} (n+1)n \geq n+1$$

Die Folge $(n)_{n\geq 0}$ ist, wie in der Vorlesung gezeigt wurde, nicht beschränkt. Insbesondere ist $(e_n)_{n\geq 0}$ unbeschränkt.

(c) Behauptung: Die Folge $(f_n)_{n\geq 0}$ ist unbeschränkt.

Beweis: Wir beweisen wie in (b) mittels vollständiger Induktion, dass die Folge $(f_n)_{n\geq 7}$ mit $(n)_{n\geq 7}$ nach unten abgeschätzt werden kann.

IA: Betrachte $n = 7$. Dann gilt $f_n = f_7 = 13 \geq 7$ und $f_{n-1} = f_6 = 8 \geq 6$.

IS: Für $n \in \mathbb{N}$ gelte $f_n \geq n$ und $f_{n-1} \geq n-1$ (IV).

Behauptung

$$f_{n+1} \geq n+1 \quad \text{und} \quad f_n \geq n$$

Beweis

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \overset{\text{(IV)}}{\geq} 2n \geq n$$

und

$$f_n \overset{(IV)}{\geq} n.$$

Wie in Aufgabenteil (b) folgt, dass die Folge $(f_n)_{n\geq 0}$ unbeschränkt ist.

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass eine konvergente Folge beschränkt ist. Damit können die Folgen aus (a), falls $q > 1$ und $c_0 \neq 0$, (b) und (c) nicht konvergent sein. Ist $q \leq 1$, so können wir nur auf Grund der Beschränktheit der Folge $(c_n)_{n\geq 0}$ nichts über die Konvergenz sagen. In der Vorlesung wird gezeigt, dass für $q = -1$ die Folge divergent und für $-1 < q \leq 1$ konvergent ist.

Aufgabe G2 (Konvergenz von Folgen)

Untersuchen Sie die Folgen auf Konvergenz.

(a) $a_n = (-1)^n 42$, $n \geq 0$,

(b) $b_n = (-1)^n \frac{1}{n}$, $n \geq 1$,

(c) $c_n = \frac{5n+2}{n}$, $n \geq 1$.

Lösung: (a) Behauptung: Die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ konvergiert nicht.

Annahme: Wir nehmen an, dass die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ gegen einen Grenzwert a konvergiert.

Beweis: Nach Annahme existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass

$$\varepsilon > |a_n - a| = |(-1)^n 42 - a| \geq ||(-1)^n 42| - |a|| = ||42| - |a||$$

für alle $n \geq N(\varepsilon)$ gilt. Daher ist entweder $a = 42$ oder $a = -42$. Nehmen wir an, es gilt $a = 42$. Sei $\varepsilon = 1$. Nach Annahme existiert ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass

$$1 = \varepsilon > |a_n - a| \tag{1}$$

für alle $n \geq N(\varepsilon)$. Ist n ungerade, so gilt aber $|a_n - a| = 84$. Dies ist ein Widerspruch zu (1). Damit kann 42 nicht der Grenzwert sein. Analog sehen wir, dass -42 nicht der Grenzwert sein kann.

(b) Behauptung: Die Folge $(b_n)_{n\geq 1}$ eine Nullfolge ist.

Beweis: Für $\varepsilon > 0$ sei $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $N(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon}$. Dann gilt für alle $n \geq N(\varepsilon)$

$$\left|(-1)^n \frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Somit ist $(b_n)_{n\geq 0}$ eine Nullfolge.

(c) Erweitern wir c_n mit $\frac{1}{n}$, ergibt sich

$$\frac{5n+2}{n} = 5 + 2\frac{1}{n}.$$

Wir wissen bereits, dass $(\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ eine Nullfolge ist. Mit den Rechenregeln für den Grenzwert erhalten wir somit, dass $(c_n)_{n\geq 1}$ konvergiert und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n+2}{n} = 5 + 2\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 5$$

gilt.

Aufgabe G3 (Komplexe Konjugation)

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = \overline{z}$ für $z \in D(f) = \mathbb{C}$. Zeigen Sie:

(a) $f(z_1) \cdot f(z_2) = f(z_1 z_2)$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$,

(b) $f(z_1) + f(z_2) = f(z_1 + z_2)$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$,

(c) f ist bijektiv.

Bestimmen Sie die Umkehrfunktion von f.

Bemerkung für mathematisch Interessierte: Die Funktion f und die Funktion $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $g(z) = z$ für $z \in D(g) = \mathbb{C}$ sind die beiden einzigen Funktionen, die obige Bedingungen auf $\mathbb{C}$ erfüllen.

Lösung: Seien $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ und $z_1 = a_1 + ib_1 \in \mathbb{C}$ und $z_2 = a_2 + ib_2 \in \mathbb{C}$.

(a)

$$\begin{aligned} f(z_1) \cdot f(z_2) &= \overline{z}_1 \overline{z}_2 = (a_1 - ib_1)(a_2 - ib_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) - i(a_1b_2 + b_1a_2) \\ &= \overline{(a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + b_1a_2)} = \overline{z_1 z_2} \\ &= f(z_1 z_2) \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} f(z_1) + f(z_2) &= \overline{z}_1 + \overline{z}_2 = a_1 - ib_1 + a_2 - ib_2 = (a_1 + a_2) - i(b_1 + b_2) \\ &= \overline{(a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)} = f(z_1 + z_2) \end{aligned}$$

(c) Behauptung: f ist surjektiv.

Beweis: Wir müssen zeigen, dass für alle $z_2 \in \mathbb{C}$ ein $z_1 \in D(f) = \mathbb{C}$ existiert mit $f(z_1) = z_2$.

Für $z_2 \in \mathbb{C}$, setze $z_1 = \overline{z}_2$. Dann gilt $f(z_1) = \overline{\overline{z}}_2 = z_2$.

Behauptung: f ist injektiv.

Beweis: Seien $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ und $z_1 = a_1 + ib_1 \in \mathbb{C}$ und $z_2 = a_2 + ib_2 \in \mathbb{C}$. Wir müssen zeigen, dass aus $f(z_1) = f(z_2)$ die Gleichheit $z_1 = z_2$ folgt.

Gelte nun $f(z_1) = f(z_2)$. Dann erhalten wir

$$f(z_1) = a_1 - ib_1 = a_2 - ib_2 = f(z_2).$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn sowohl $a_1 = a_2$ als auch $b_1 = b_2$ gilt.

Die Umkehrfunktion ist gegeben durch $f^{-1} = f$, denn für $z \in D(f) = \mathbb{C}$ erhalten wir

$$f(f(z)) = f(\overline{z}) = \overline{\overline{z}} = z.$$

Hausübung

Aufgabe H1 (10 Punkte)

Untersuchen Sie die Folgen auf Konvergenz.

(a) $a_n = \frac{1}{3^n - n}$, $n \geq 0$,

(b) $b_n = n^2$, $n \geq 0$,

(c) $c_n = \frac{(n+2)^2}{n^3-n+1}$, $n \geq 0$.

Hinweis zu (a): Zeigen Sie zuerst mittels vollständiger Induktion $3^n \geq 2n$.

Lösung: (a) Wir zeigen zuerst den Hinweis:
Behauptung: $3^n \geq 2n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
Beweis: Mit Hilfe der vollständigen Induktion erhalten wir die Behauptung:
IA: Betrachte $n = 0$. Dann erhalten wir $3^0 = 1 \geq 0$.
IS: Für $n \in \mathbb{N}_0$ gelte $3^n \geq 2n$ (IV).
Behauptung

$$3^{n+1} \geq 2(n+1)$$

Beweis

$$3^{n+1} = 3 \cdot 3^n \overset{\text{(IV)}}{\geq} 6n \geq 2(n+1).$$

Behauptung: $(a_n)_{n\geq 0}$ ist eine Nullfolge.
Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $N(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon}$. Dann erhalten wir mit dem Hinweis

$$\left| \frac{1}{3^n - n} - 0 \right| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N(\varepsilon)$.
(b) Es gilt $b_n \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Damit ist die Folge unbeschränkt und somit divergent.
(c) Behauptung: Die Folge $(c_n)_{n\geq 0}$ konvergiert gegen 0.
Beweis: Erweitern wir $\frac{(n+2)^2}{n^3-n+1}$ mit $\frac{1}{n^3}$, ergibt sich

$$\frac{(n+2)^2}{n^3 - n + 1} = \frac{\frac{1}{n} + \frac{4}{n^3} + \frac{4}{n^2}}{1 - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}^3}.$$

Mit Hilfe der Rechenregeln für Grenzwerte erhalten wir, dass die Folge konvergiert und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)^2}{n^3 - n + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} + \frac{4}{n^3} + \frac{4}{n^2}}{1 - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}} = \frac{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + 4 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} + 4 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}}{1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}} = 0.$$

Aufgabe H2 (8 Punkte)

Widerlegen Sie folgende Aussagen, indem Sie geeignete Gegenbeispiele konstruieren.

(a) Jede beschränkte Folge ist konvergent.

(b) Die Summe zweier divergenter Folgen ist divergent.

(c) Das Produkt zweier divergenter Folgen ist divergent.

(d) Seien die beiden Folgen $(a_n)_{n\geq 0}$ und $(b_n)_{n\geq 0}$ divergent gegen den uneigentlichen Grenzwert ∞ und $b_n \neq 0$ für alle $n \geq 0$, dann ist die Folge $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\geq 0}$ beschränkt.

Lösung: (a) Siehe Beispiel G2 (a).
(b) Betrachte die Folgen $(n)_{n\geq 0}$ und $(-n)_{n\geq 0}$.
(c) Betrachte für beide Folgen $((-1)^n)_{n\geq 0}$.
(d) Betrachte die Folgen $(a_n)_{n\geq 0}$ und $(b_n)_{n\geq 0}$ mit $a_n = (n+1)^2$ und $b_n = n+1$ für $n \geq 0$.

Aufgabe H3 (12 Punkte)

(a) Zeigen Sie die Dreiecksungleichung für komplexe Zahlen, d. h.

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

(b) Zeigen Sie die umgekehrte Dreiecksungleichung für komplexe Zahlen, d. h.

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

(c) Überlegen Sie sich geometrisch, woher die Bezeichnung Dreiecksungleichung stammt.

Lösung: Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ und $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ mit $z_1 = a_1 + ib_1$ und $z_2 = a_2 + ib_2$.
(a) Es gilt $(a_1 b_2 - b_1 a_2)^2 \geq 0$. Addieren wir auf beiden Seiten $a_1^2 a_2^2 + b_1^2 b_2^2$, erhalten wir

$$(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) \geq (a_1 a_2 + b_1 b_2)^2.$$

Ziehen wir auf beiden Seiten die Wurzel, so ergibt sich

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2} \geq a_1 a_2 + b_1 b_2.$$

Multiplizieren wir obige Ungleichung mit 2, addieren $a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2$ und ziehen die Wurzel, haben wir die Behauptung gezeigt:

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \geq \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2}.$$

(b) 1. Fall: $|z_1| \geq |z_2|$. Mit der Dreiecksungleichung erhalten wir

$$|z_1| = |z_1 - z_2 + z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2|.$$

Und somit $||z_1| - |z_2|| = |z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$.
2. Fall: $|z_1| \leq |z_2|$. Der Beweis geht wie im ersten Fall. Wir ersetzen in der obigen Argumentation z_1 durch z_2 und umgekehrt.
(c) Der Betrag einer komplexen Zahl beschreibt die Entfernung der Zahl vom Ursprung. Die Dreiecksungleichung besagt also nichts anderes, als dass der Weg vom Ursprung direkt zu $z_1 + z_2$ nicht größer sein kann, als wenn man zuerst zu z_1 und dann zu $z_1 + z_2$ läuft.