Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
M. Fuchssteiner
M. Slassi

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2008/2009
14. November 2008

4. Übungsblatt zur „Mathematik I für BI, WI(BI), MaWi, AngGeo und UI"

Gruppenübung

Aufgabe G1 ()

Für $z_0 \in \mathbb{C}$ sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = z_o z$ für $z \in D(f) = \mathbb{C}$. Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.

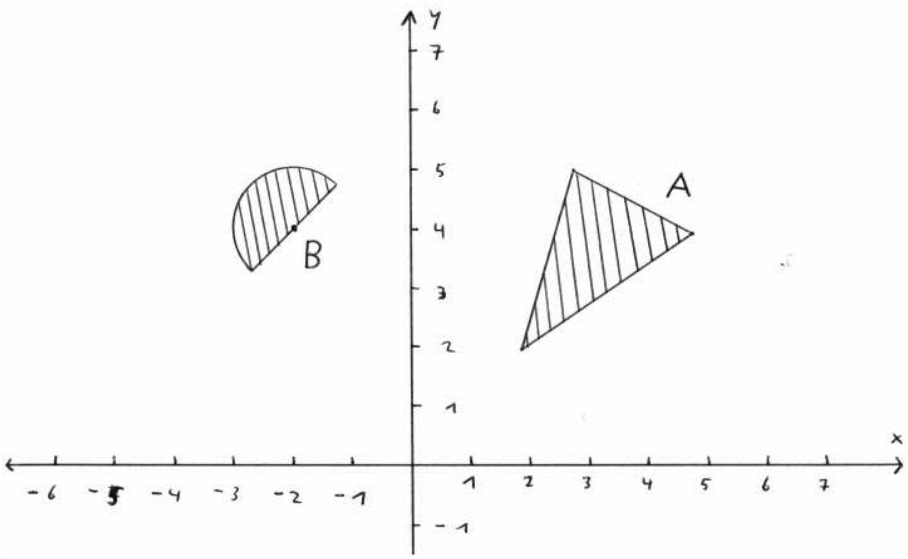
[( )] Die Funktion f ist injektiv für alle $z_0 \in \mathbb{C}$.
[( )] Die Funktion f ist surjektiv für kein $z_0 \in \mathbb{C}$.
[( )] Die Funktion f ist injektiv für $z_0 = 1$.
[( )] Die Funktion f ist injektiv für alle $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
[( )] Die Funktion f ist genau dann nicht surjektiv, wenn $z_0 = 0$.

Lösung: Es gilt:

[(f)] Die Funktion f ist injektiv für alle $z_0 \in \mathbb{C}$.
[(f)] Die Funktion f ist surjektiv für kein $z_0 \in \mathbb{C}$.
[(w)] Die Funktion f ist injektiv für $z_0 = 1$.
[(w)] Die Funktion f ist injektiv für alle $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
[(w)] Die Funktion f ist genau dann nicht surjektiv, wenn $z_0 = 0$.

Aufgabe G2 ()

(a) Beschreiben Sie die Mengen A und B jeweils durch ein System von Gleichungen und/oder Ungleichungen.



(b) Skizzieren Sie die Mengen

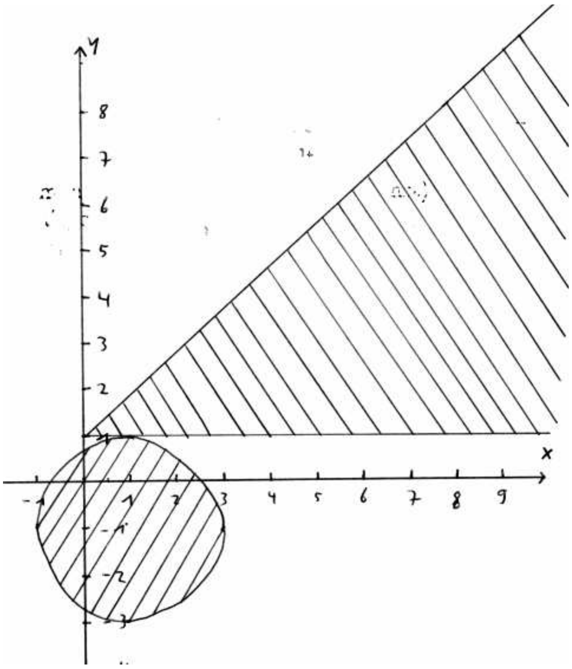
$$\begin{aligned} C &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 - x + y \leq 0 \wedge y \geq 1\}, \\ D &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 4\}. \end{aligned}$$

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq \frac{2}{3} + \frac{2}{3}x \wedge y \leq \frac{13}{2} - \frac{1}{2}x \wedge y \leq -4 + 3x\}, \\ B &= \{(x,y)\mathbb{R}^2 : y \geq x + 6 \wedge (x+2)^2 + (y-4)^2 \leq 1\}. \end{aligned}$$

(b)



Aufgabe G3 ()

(a) Stellen Sie folgende komplexe Zahlen in der Form $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ dar:

$$z_1 = i^3, \quad z_2 = (2+i) \cdot \overline{(-1+6i)}, \quad z_3 = \frac{3+2i}{1-i} - \frac{5+i}{3+i}.$$

(b) Beweisen Sie das Kommutativgesetz der Multiplikation für komplexe Zahlen, d.h. $z_1 z_2 = z_2 z_1$ für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned} z_1 &= -i, \quad z_2 = (2+i)(-1-6i) = 4 - 13i, \\ z_3 &= \frac{(3+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} - \frac{(5+i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = -\frac{11}{10} + \frac{27}{10}i. \end{aligned}$$

(b) Sei $z_1 = a_1 + ib_1$ und $z_2 = a_2 + ib_2$. Dann gilt

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1) \stackrel{(1)}{=} a_2 a_1 - b_2 b_1 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1) \\ &\stackrel{(2)}{=} a_2 a_1 - b_2 b_1 + i(a_2 b_1 + a_1 b_2) = z_2 z_1. \end{aligned}$$

Hierbei haben wir verwendet:
(1) Kommutativgesetz der Multiplikation für reelle Zahlen.
(2) Kommutativgesetz der Addition für reelle Zahlen.

Aufgabe G4 ()
Beweisen Sie das Additionstheorem

$$\sin(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta), \quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}.$$

Lösung: Wir benutzen die Bezeichnungen aus der Vorlesung (4.5 Kreisfunktionen (vi)). Es gilt

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= c+d = \frac{\sin(\beta)}{\cos(\alpha)} + a\sin(\alpha) = \frac{\sin(\beta)}{\cos(\alpha)}\left(1-(\sin(\alpha))^2\right) + \sin(\alpha)\cos(\beta)\\ &= \cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta).\end{aligned}$$

Hausübung

Aufgabe H1 (8 Punkte)
(a) Stellen Sie folgende komplexe Zahlen in der Form $a+ib$ mit $a,b\in\mathbb{R}$ dar:

$$z_1 = i^4, \quad z_2 = (3+i)\cdot\overline{(-1+2i)}, \quad z_3 = \frac{(1+2i)^2}{2+3i}, \quad z_4 = \left(\frac{4-i}{2+i}\right)^2.$$

(b) Beweisen Sie das Assoziativgesetz der Multiplikation für komplexe Zahlen, d.h. $z_1(z_2z_3) = (z_1z_2)z_3$ für $z_1,z_2,z_3\in\mathbb{C}$.

Lösung:
(a)

$$\begin{aligned} z_1 &= 1, \quad z_2 = (3+i)(-1-2i) = -1-7i, z_3 = \frac{(1+2i)^2(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{6}{13}+\frac{17}{13}i\\ z_4 &= \left(\frac{(4-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}\right)^2 = \frac{13}{25}-\frac{84}{25}i\end{aligned}$$

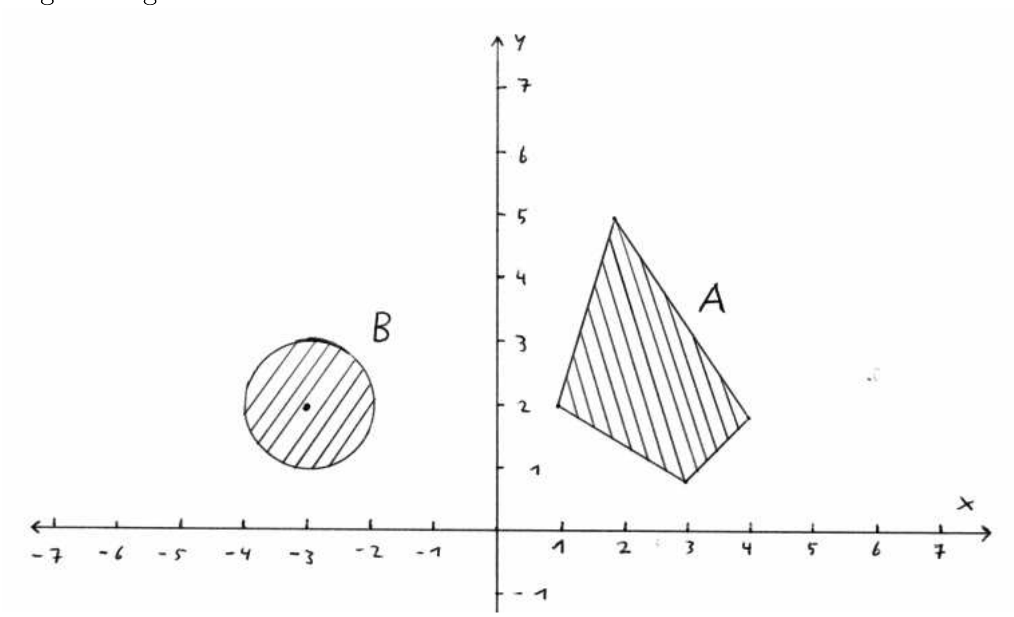
(b) Sei $z_1 = a_1+ib_1$, $z_2 = a_2+ib_2$ und $z_3 = a_3+ib_3$. Dann gilt

$$\begin{aligned} z_1(z_2z_3) &= (a_1+ib_1)(a_2a_3-b_2b_3+i(a_2b_3+a_3b_2))\\ &= a_1(a_2a_3-b_2b_3) - b_1(a_2b_3+a_3b_2) + i(b_1(a_2a_3-b_2b_3)+a_1(a_2b_3+a_3b_2)\\ &\overset{(1)}{=} a_1(a_2a_3) - a_1(b_2b_3) - b_1(a_2b_3) - b_1(a_3b_2)\\ &\quad + i(b_1(a_2a_3) - b_1(b_2b_3) + a_1(a_2b_3) + a_1(a_3b_2))\\ &\overset{(2)}{=} a_1(a_2a_3) - b_1(a_3b_2) - a_1(b_2b_3) - b_1(a_2b_3)\\ &\quad + i(a_1(a_2b_3) - b_1(b_2b_3) + a_1(a_3b_2) + b_1(a_2a_3))\\ &\overset{(3)}{=} (a_1a_2)a_3 - (b_1b_2)a_3 - (a_1b_2)b_3 - (a_2b_1)b_3\\ &\quad + i((a_1a_2)b_3 - (b_1b_2)b_3 + (a_1b_2)a_3 + (a_2b_1)a_3)\\ &\overset{(1)}{=} (a_1a_2-b_1b_2)a_3 - (a_1b_2+a_2b_1)b_3 + i((a_1a_2-b_1b_2)b_3 + (a_1b_2+a_2b_1)a_3\\ &= (a_1a_2-b_1b_2+i(a_1b_2+a_2b_1))(a_3+ib_3) = (z_1z_2)z_3\end{aligned}$$

Hierbei haben wir verwendet:
(1) Distributivgesetz für reelle Zahlen.
(2) Kommutativgesetz der Addition für reelle Zahlen.
(3) Kommutativgesetz/Assoziazivgesetz der Multiplikation für reelle Zahlen.

Aufgabe H2 (12 Punkte)

(a) Beschreiben Sie die Mengen A und B jeweils durch ein System von Gleichungen und/oder Ungleichungen.



(b) Skizzieren Sie die Mengen

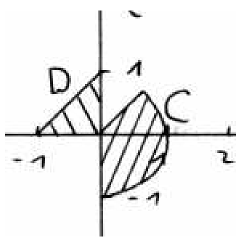
$$C := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \wedge y - x \leq 0 \wedge x^2 + y^2 \leq 1\},$$
$$D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0 \wedge y \geq 0 \wedge 1 + x - y \geq 0\}.$$

Lösung:

(a)

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq -2 + x \wedge y \geq \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x \wedge y \leq 8 - \frac{3}{2}x \wedge y \leq -1 + 3x\},$$
$$B = \{(x,y)\mathbb{R}^2 : (x+3)^2 + (y-2)^2 \leq 1\}.$$

(b)



Aufgabe H3 (6 Punkte)

Gegeben ist ein Punkt P, der bezüglich des (x,y)-Koordinatensystems die Koordinaten $(2,3)$ hat. Nun wird das Koordinatensystem um $\frac{\pi}{4}$ gedreht, es entsteht ein neues Koordinatensystem, das (x', y')-System.

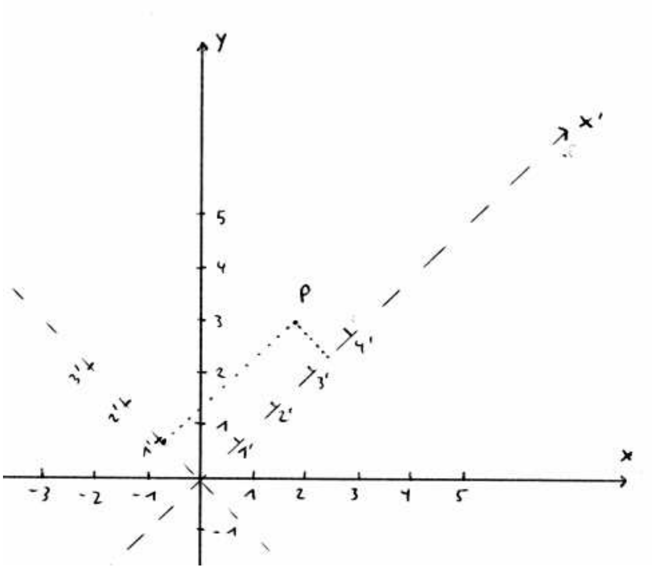
(a) Bestimmen Sie durch eine entsprechende Skizze die ungefähren Koordinaten des Punktes P im (x', y')-System.

(b) Bestimmen Sie die neuen Koordinaten mit Hilfe der in der Vorlesung angegebenen Formel.

(c) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes P' im (x, y)-System, der durch Drehung um $\frac{7\pi}{4}$ aus P hervorgeht. Vergleichen Sie diese mit den Koordinaten des Punktes P im (x', y')-System.

Lösung:

(a) Die Koordinaten von P im (x', y')-Koordinatensystem sind $(3.5, 0.7)$.



(b) Nach Vorlesung gilt: $x'_0 = x_0 \cos(\alpha) + y_0 \sin(\alpha)$ und $y'_0 = -x_0 \sin(\alpha) + y_0 \cos(\alpha)$. Daher hat P die Koordinaten $(\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \approx (3.54, 0.71)$.

(c) Nach Vorlesung hat P' die Koordinaten (x'_0, y'_0), wobei $x'_0 = x_0 \cos(\alpha) - y_0 \sin(\alpha)$ und $y'_0 = x_0 \sin(\alpha) + y_0 \cos(\alpha)$. Daher hat P' die Koordinaten $(\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \approx (3.54, 0.71)$. Wie in der Vorlesung (4.7 Drehung des Koordinatensystems) erwähnt, stimmen die Koordinaten von P im (x', y')-Koordinatensystem mit den Koordinaten von P' überein.